ELEMENTI
DI
MATEMATICA
COMPOSTI PER USO
DELLA STUDIOSA GIOVENTÙ
DALL' ABATE
LUDOVICO MARRANO
TOMO II.
IL QUALE CONTIENE
LA GEOMETRIA PIANA.

NAPOLI
DAI TORCHI DEI FRATELLI PACI.
1838.

PREFAZIONE.

Il termine Geometria *è greco di sua natura, ed è composto da queste due voci* γῆ, *che vuol dire terra, e* μέτρον, *che significa misura, cioè misura della terra; nome, in verità, adattato a dinotarci la sua origine, la quale se vogliamo prestar fede all' antiche storie, inventata fu dagli Egiziani per misurare i limiti de' loro campi; che confondendosi scambievolmente per le annuali inondazioni del Nilo, somministravano ai medesimi materia di continue discordie. Ma sebbene la Geometria abbia avuto un principio così vile, e basso; nulla però di manco, coi continui travagli de' Geometri s' è tanto avvanzata, che senza timor d' errare, annoverar si può tra le Scienze le più nobili e perfette, sì per la stabilità de' suoi principj, come ancora per l' infallibile certezza delle verità, che dimostra, e per l' ordine mirabile, che osservasi nelle sue proposizioni; in guisa che un' opera veramente metodica, si suol dire fatta con ordine Geometrico.*

Io non m' impegno quì ad esporre i pregi della Geometria, cioè di quella Scienza, la quale (come a proposito si definisce) contempla la quantità continua, o sia estesa in lungo, largo, e profondo; essendo i medesimi ad ognuno ben noti; soltanto avvertisco, che questa è d' una necessità assoluta per l' intelligenza delle altre parti di Matematica, essendo rispetto ad esse, come la Logica rispetto alla Filosofia; anzi di più, poichè la Logica stes-

sa , e 'l resto della Filosofia han bisogno della Geometria. Ed in fatti , se la Logica l' arte è di ragionare , come mai si potrà ben ragionare, senza acquistar l' uso , e la pratica de' giusti raziocinj , il che non si potrà meglio ottenere , se non se collo studio della Geometria , non essendo altro le sue dimostrazioni , che perfettissimi raziocinj mirabilmente fra loro concatenati. Ed ecco perchè giammai si son veduti al Mondo gran Filosofi , senza essere stati eccellenti Geometri. Questa verità è tanto certa , ed antica nel tempo stesso , che Platone avea fatto scolpire sulla porta della sua scuola le seguenti parole
αγεωμετρητος εισιτω : non ardisca entrare in questo luogo persona alcuna priva delle geometriche cognizioni.

Affinchè dunque i Giovani anziosi d'apprendere sodamente le matematiche, e filosofiche verità possano con facilità mettere in esecuzione un tale insegnamento , mi sono accinto a pubblicare con le stampe questi nuovi elementi di Geometria , che formano il secondo tomo del mio corso matematico , nei quali ho procurato unire la brevità alla chiarezza ; acciò scorsi i medesimi senza tedio , e rincrescimento , anzi per lo contrario con zelo , ed impegno faccian poscia de' vantaggiosi progressi nelle altre scienze.

DELLA

GEOMETRIA PIANA

LIBRO PRIMO.

DEFINIZIONI

I.

Il *Punto* è un segno indivisibile nella quantità continua, privo di lunghezza, larghezza, e profondità.

II.

Per *Linea* s'intende una quantità soltanto lunga, e perciò priva di larghezza, e profondità.

Questa per astrazion di mente si concepisce generata dallo scorrere d'un punto.

III.

I termini della linea sono i *Punti*.

IV.

La *Superficie* è una quantità dotata di lunghezza, e larghezza, ma priva di profondità.

La superficie mentalmente si concepisce generata dal moto laterale d' una linea.

V.

I termini della Superficie sono le *Linee*.

VI.

Il *Corpo* ovvero *Solido*, è una estensione lunga, larga e profonda.

Questo si concepisce generato dal moto della superficie o verso sopra, o verso sotto.

VII.

Gli estremi, o termini del corpo sono le *Superficie*.

AVVERTIMENTO.

È quì da osservare, che se bene per una pura astrazion di mente si consideri la linea generata dallo scorrere d' un punto; la Superficie dal moto laterale della linea; ed il solido del moto della Superficie in sù, o in giù: nulladimeno però essendo le parti componenti sempre della stessa natura del tutto; non devono dirsi le linee composte da punti, le superficie da linee, ed i corpi dalle superficie; ma bensì le linee composte da altre minori superficie, ed i corpi similmente da altri corpi più piccioli.

VIII.

La linea si divide in *retta*, e *curva*.

Dicesi *linea retta*, quella, ch' è la più brieve di tutte le altre, che si possono tirare da un punto, ad un' altro; ovvero quella, nella quale tutte le parti giaciono a dirittura tra i suoi estremi. *Curva* per lo contrario si dice, se non è la più brieve in tutte quelle, che tirar si possono da un punto ad un' altro, o pure se tutte le sue parti non giaciono a dirittura fra i suoi estremi.

IX.

La Superficie anche si divide in due specie, cioè *piana*, e *curva*.

Si chiama *Superficie piana* quella, alla quale da ogni parte si può adattare una linea retta, ovvero quella, nella quale tutte le parti son situate a dirittura tra i suoi estremi. Dicesi poi *curva* se è tale, che ad essa non si può da ogni parte adattare una linea retta, ovvero se le parti non sono tutte a dirittura tra i suoi estremi.

X.

Per *Angolo piano* s' intende la scambievole inclinazione di due linee, che s' incontrano sù d' un

piano in un sol punto. Il punto dell' incontro si chiama *vertice*, e le due linee *lati* dell' angolo.

AVVERTIMENTO.

I Geometri per contrasegnare i punti, (*Fig. 1.*) le linee, e gl' angoli formati sù de' piani, si servono delle lettere dell' Alfabeto; cioè di una per il punto, dicendo il punto A, di due per una linea, situate però ne' suoi estremi, con dire la linea retta BC, o pure la linea curva DE; e finalmente per un' angolo, o di tre, situando però quella, ch' è al vertice in mezzo, o di una sola situata nel vertice, dicendo l' angolo FGH, ovvero l' angolo G.

XI.

L' angolo per riguardo ai lati da' quali è formato, si divide in *rettilineo*, *curvilineo*, e *mistilineo*: Si chiama *rettilineo*, (*Fig. 1.*) se è formato da due linee rette: *curvilineo*, se da due linee curve: e finalmente *mistilineo*, se da una retta, e da una curva; e perciò l' angelo FGH è *rettilineo*, MNO *curvilineo*, ed IPL *mistilineo*.

XII.

Se una retta cade su d' un' altra in modo, che non inclina più a destra, che a sinistra, si dirà la prima *perpendicolare* per rispetto alla seconda; si dirà poi *obliqua*, se inclinerà più da una parte, che dall' altra.

Così la retta CD (*Fig. 2.*) *è perpendicolare ad* AC *ma* CE, CF *sono oblique*.

COROLLARIO.

È chiaro dunque, che la posizione della perpendicolare è costante, ed invariabile; ma dell' obli-

qua può variare all'infinito ; e perchè la distanza che passa tra un punto , ed una linea , tra linea , e linea ec. dev' essere una retta costante , e non già variabile ; perciò i Geometri per le misure esatte di tali distanze si servono sempre delle perpendicolari.

XIII.

L' angolo , rispetto la sua inclinazione si distingue in *retto* , *acuto* , *ed ottuso* : si chiama *retto* , se è formato da due linee rette , delle quali una è perpendicolare all' altra : *acuto* se è minore del retto ; e finalmente *ottuso* se è maggiore del retto.

Così essendo DC (*Fig.* 2.) *perpendicolare* , *e* PD *obliqua* , *sarà retto sì l' angolo* CDA , *che l' angolo* CDB ; *ma acuto l' angolo* PDA , *e ottuso l' angolo* PDB.

AVVERTIMENTO.

Essendo la direzione della perpendicolare costante , perciò gl' angoli retti sono tutti uguali ; ma potendo la direzione delle oblique variare all' infinito , devono variare anche all' infinito sì gli angoli acuti , che gli ottusi ; onde essendo per rispetto di AB più obliqua CF , che CE , sarà l' angolo CFE più acuto , e conseguentemente minore dell' angolo CED ; e l' angolo CFB più ottuso , e perciò maggiore di CEB.

XIV.

Due rette linee si diranno *parallele* , se esistenti in un medesimo piano , e prolungate all' infinito giammai s' uniscono, ma conservono sempre la stessa distanza fra loro : come appunto sono (*Fig.* 3.) AB , e CD.

COROLLARIO.

Conservando le parallele sempre la stessa distanza , è chiaro , che le perpendicolari EF , GH , MN

abbassate tra le medesime devono essere tutte uguali.

XV.

Per *figura* s' intende uno spazio racchiuso o da uno, o da più termini; e perchè i termini che possono chiudere qualche spazio si riducono a linee, e superficie; perciò si diranno *figure piane*, o *superficie piane*, i spazj racchiusi da linee; e *figure solide*, i spazj racchiusi da superficie.

XVI.

Le figure piane diconsi *rettilinee*, se sono terminate da linee rette, *curvilinee* se da curve; e *mistilinee* se da linee in parte rette, e parte curve. La somma di tutte le linee, che chiudono una figura piana, si chiama *perimetro*, ciascuna di esse *lato* della figura, e lo spazio racchiuso *ampiezza*.

XVII.

Le Figure rettilinee diconsi *trilatere*, se sono terminate da tre lati; *quadrilatere*, se da quattro; e finalmente *multilatere*, o *poligone* se da più di quattro. E poichè in esse quanti sono i lati, altrettanti sono gl' angoli; perciò le figure trilatere si dicono anche *triangoli*, le quadrilatere *quadrangoli* e le multilatere, *multangoli*.

XVIII.

Il triangolo riguardo ai lati si divide in tre specie: *equilatero*, *isoscele*, *e scaleno*. Dicesi *equilatero*, se tutti e tre i lati sono uguali, com'è appunto ABC (*Fig. 4.*); *isoscele* se due soltanto sono uguali, come DEF; e finalmente *scaleno*, se tutti e tre sono disuguali, come CHI.

Dividesi poi il triangolo per rispetto degli angoli in *rettangolo*, *ottusangolo*, ed *acutangolo*. Si dirà *rettangolo*, se avrà un angolo retto, *ottusangolo*, se avrà un angolo ottuso ed in fine *acutangolo*, se tutti e tre i suoi angoli saranno acuti.

Sicchè il triangolo HGI, che ha l'angolo in G retto, è *rettangolo*, dov'è da osservarsi, che il lato HI opposto all'angolo retto G, con un termine greco si chiama *Ipotenusa*, e gl'altri due lati GH, GI *cateti*. Il triangolo poi NMO, che ha l'angolo in M ottuso, è *ottusangolo*; e finalmente il triangolo EDF, che ha i tre angoli in E, D, F tutti acuti, è *acutangolo*.

AVVERTIMENTO.

Rappresenti ABC qualunque triangolo: (*Fig.* 4.) poichè ciascuno de' suoi lati, come AC, è sempre una linea retta, terminata ne' punti A, e G, e non già la somma degl'altri due AB, e BC; è chiaro (1) essere AC minore de' due AB, e BC insieme presi. Dunque d'un triangolo, qualsivoglia suo lato è sempre minore della somma degl'altri due, ovvero due lati pres'insieme sono sempre maggiori del terzo.

XIX

Le figure quadrilatere sono di due generi; cioè *parallelogrammi*, e *trapezj*: una figura quadrilatera dicesi *Parallelogrammo*, se in essa i lati opposti sono linee parallele; com'è a cagion d'esempio la figura ABCD, (*Fig.* 5.) ma per lo contrario si chiama *trapezio*; se tutt'i lati opposti non sono linee parallele, come nella figura EFGH.

XX.

Il Parallelogrammo si divide in quattro specie, e sono il *Quadrato*, il *Rettangolo*, o *Quadrilungo*, *Rombo*, e *Rombaide*. Un Parallelogrammo si chiamerà *Quadrato*, se avrà tutti i lati uguali, e tutti gl'angoli retti: si dirà *Rettangolo o Quadrilungo* se avrà gl'angoli tutti retti, ma non tutt'i

(1) *Defi.* 8.

lati uguali : *Rombo*, se avrà i lati tutti uguali, ma non già gl' angoli retti; si dirà finalmente *Romboide*, se non avrà i lati tutti uguali, nè gl' angoli retti; ma soltanto i lati, e gl' angoli opposti uguali.

Per esempio : ABCD (*Fig.* 6.) *è un quadrato* EFGH *un Rettangolo*, LMNO *rappresenta un Rambo*, *e* PQRS *un Romboide.*

XXI.

Due figure rettilinee si diranno *equilatere*, o *equiangole* fra loro, secondochè i lati, o gl' angoli d' una saranno respettivamente uguali ai lati, o agli angoli dell' altra. Si diranno poi *uguali*, se avranno uguali ampiezze; e verranno in fine dette *perfettamente uguali*, se avendo i lati respettivamente fra loro uguali, avranno ancora uguali non solo le ampiezze, ma eziandio gl' angoli opposti ai lati uguali.

XXII.

Si dice *Altezza* d' una figura la perpendicolare abbassata sulla sua base dal vertice dell'angolo opposto.

COROLLARIO.

Essendo le perpendicolari abbassate tra due parallele tutte uguali; ne siegue, che le figure racchiuse tra le medesime parallele hanno sempre uguali altezze.

XXIII.

Il *Cerchio* è una figura piana terminata da una linea curva, che ritorna in se stessa, chiamata *Periferia*, o *Circonferenza*, e che ha di più un punto nel mezzo, che dicesi *Centro*, dal quale tutte le rette tirate alla circonferenza, che si chiamano *Raggi*, sono fra loro uguali.

Così la linea curva (*Fig.* 7.) ABCE *è la periferia*, *o circonferenza*, *lo spazio da essa rac-*

chiuso è il cerchio, *il punto* E *il centro*, *e le rette* EA, EB, EC *ec. sono i raggi.*

XXIV.

Il *Diametro* del cerchio è una linea retta, la quale passando per il centro termina da amendue le parti nella periferia, com' è appunto BD; e perciò ogni raggio essendo la metà d' un diametro, si potrà anche chiamare *Semidiametro*. Ogn' altra retta, differente dal diametro, che sega la periferia in due punti dicesi *corda*, di tal fatta è CD.

AVVERTIMENTO.

Il cerchio si concepisce astrattamente generato dalla rivoluzione d' una linea retta intorno d' un suo estremo fisso ed immobile, finchè ritorni al primiero sito. L' estremità mobile della mentovata linea descrive la periferia, e il punto fisso determina il centro.

XXV.

Il *Semicerchio* è una figura piana racchiusa da un diametro, e della metà della circonferenza; come sarebbe (*Fig. 7.*) BAD, o BCD. La *porzione di cerchio* è uno spazio racchiuso da qualunque corda, e dal suo arco corrispondente, come CBAD, ovvero CFD. Il *Settore* finalmente è uno spazio chiuso da due raggi, che formano nel centro un' angolo, e dall'arco corrispondente, come per esempio BEC, BEA.

AVVERTIMENTO.

La Periferia di qualsivoglia cerchio si divide dai Geometri in 300. parti uguali che chiamansi *Gradi*. Ogni *Grado* suddividesi in 60. altre parti uguali, dette *Minuti primi*. Ogni minuto primo in 60. *Secondi*, e così all' infinito.

Queste divisioni sono state imaginate specialmente per misurare gli angoli, e determinare esattamente i rapporti, ch' essi hanno tra loro. Si deve però avvertire, che il grado non è una grandezza fissa, ed assoluta, ma variabile secondo i differenti cerchi; cioè che sebbene la periferia di qualunque cerchio si divida in 360. parti uguali, che sono i gradi; questi però devono essere maggiori ne' cerchi più grandi, e minori ne' più piccioli, lo stesso dir si deve de' minuti primi, e secondi.

POSTULATI

Da un punto ad un' altro tirare una linea retta.

Questo postulato s' eseguisce in prattica con la riga; cioè adattandola su i dati punti, e segnando a lato della medesima con qualche stromento acuminato. Per osservare poi se una riga sia esatta, basterà con essa tirare una retta, e poscia osservare, se la medesima rivoltata perfettamente si combaci colla retta già tirata.

II.

Data una linea retta terminata, prolungarla a dirittura quanto si vuole.

S' eseguisce questo secondo postulato anche con la riga, cioè adattandola su la data retta, e segnando a lato della medesima.

III.

Dato un punto per centro, ed una retta per intervallo, descrivere un cerchio.

Questo terzo postulato si eseguisce col compasso, cioè adattando una sua punta fissa ed immobile sul dato centro, e l' altra girandola intorno l' estremità dell' intervallo, fino a tanto che ritorni al primiero suo sito. Si dirà poi esser' esatto un

compasso, se rimarrà fermo ad ogni apertura delle sue gambe, e se le sue punte saranno ben sottili, che perciò sogliono farsi d' acciajo, e non già d' ottone.

ASSIOMI

I.

Quelle grandezze, che sono uguali ad una terza, sono anche uguali tra loro; e se più grandezze sono uguali, e d' esse una è maggiore, o minore d' una terza, anche l' altre sono maggiori, o minori della stessa terza.

II.

Se a grandezze uguali s' aggiungono porzioni uguali, le loro somme saranno eziandio uguali.

III.

Se da grandezze uguali ci tolgono porzioni uguali, ancora i loro avanzi saranno uguali.

IV.

Se a grandezze disuguali s' aggiungono porzioni uguali le loro somme saranno anche disuguali.

V.

Se da grandezze disuguali si togliono porzioni uguali, i loro avanzi saranno ancora disuguali.

VI.

Quelle grandezze, che sono doppie, triple, quadruple ec. d' una terza grandezza, sono fra loro uguali.

VII.

Quelle grandezze, che sono la metà, la terza, la quarta parte ec. d' un' altra terza, sono anche fra loro uguali.

VIII.

Il tutto è maggiore di ciaschedun sua parte;

ma però è uguale a tutte le sue parti prese insieme.

IX.

Le grandezze, che si combaciano, cioè che unite insieme, l' una non eccede, nè manca dall'altra, sono perfettamente uguali.

X.

Due linee rette in qualunque maniera situate, non possono chiudere spazio, cioè non possono formare alcuna figura piana.

XI.

Due linee rette, che si segano, non hanno porzione alcuna di comune, ma s' intersecano in un solo punto.

XII.

Tutti gl' angoli retti sono uguali; perchè tutti hanno la medesima inclinazione.

CAP. I.

Della perfetta ugnaglianza de' triangoli.

LEMMA.

Se dagli estremi d' una linea retta si tirano due altre rette, che s' uniscono in un punto, volendo dai medesimi estremi tirarne altre due uguali respettivamente alle prime, e dalla medesima parte, si dovranno queste unire nel medesimo punto.

DAgli estremi A, e B (*Fig. 8.*) della retta AB si tirino le due linee rette AC, BC, che s' uniscono nel punto C. Dico, che se dai medesimi estremi A, e B si vogliono tirare due altre rette uguali respettivamente alle due AC, BC, e dalla medesima parte, si dovranno unire nello stesso punto C.

Dimostrazione. Se mai ciò si niega, si tiri, s' è possibile, da A, AD uguale ad AC, e da B, BD uguale a BC, che s' uniscono nel punto D differente dal punto C. Essendo AE un triangolo, sarà la somma di AE, EC maggiore di AC, e conseguentemente maggiore della sua uguale AD (1), onde toltone di comune AE, rimarrà EC maggiore di ED, ed aggiuntovi di comune BE, sarà BC, e perciò anche la sua uguale BD maggiore della somma di BE, ED. Sicchè sarà un lato del triangolo maggiore degl' altri due; ma ciò ripugna. Dunque ri-

(1) *Avvert. alla defin.* 18.

pugna ancora, che da A si sia tirata AD uguale a AC, e da B, BD uguale a BC le quali si sieno unite nel punto D differente dal punto C. Ch' è ciò che bisognava dimostrare.

PROP. I. TEOR. I.

Se due triangoli sono fra loro equilateri, saranno perfettamente uguali.

Sieno ABC, DEF (*Fig.* 9.) due triangoli, i quali abbiano il lato AB uguale al lato DE, il lato BC uguale al lato EF, e di più la base AC uguale alla base DF. Dico che tali triangoli sono perfettamente uguali, cioè che uguali sono non solo le loro ampiezze, ma eziandio gl' angoli opposti ai lati uguali.

Dim. Si concepisca il triangolo BAC situato sul triangolo EDF, in modo, che il punto A cada sul punto D e la base AC sulla base DF, caderà, per l' uguaglianza di queste, anche il punto C sul punto F; ed essendo il lato AB uguale al lato DE, ed il lato BC uguale al lato EF, caderà il punto B sul punto E (1). Dunque si combaciano l' angolo B coll' angolo E, l' angolo A coll' angolo D, l' angolo C coll' angolo F, ed il triangolo ABC col triangolo DEF; ma le grandezze, che si combaciano sono uguali (2). Sicchè sarà l' angolo B uguale all' angolo E, l' angolo A uguale all' angolo D, l' angolo C uguale all' angolo F, ed il triangolo ABC uguale al triangolo DEF. Laonde i suddetti triangoli sono perfettamente uguali. Ch' è ciò che bisognava dimostrare.

---

(1) *Lemma preced.*
(2) *Ass.* 9.

PROP. II. TEOR. II.

Se due triangoli hanno due lati respettivamente uguali a due lati; e di più gl' angoli contenuti da tali lati anche uguali, saranno i suddetti triangoli perfettamente uguali.

Abbiamo i due triangoli (*Fig 9.*) ABC, DEF, il lato AB uguale al lato DE, il lato BC uguale al lato EF, e l' angolo ABC uguale all' angolo DEF. Dico; che tali triangoli sono perfettamente uguali.

Dim. Si concepisca il triangolo ABC posto sul triangolo DEF in modo, che il punto B cada sul punto E, ed il lato BA sul lato ED; essendo per l' ipotesi l' angolo ABC uguale all' angolo DEF, caderà ancora il lato BC su 'l lato EF, e per essere il lato BA uguale al lato ED, ed il lato BC uguale al lato EF, caderà eziandio il punto A sul punto D, ed il punto C sul punto F. Sicchè si combaciano la base AC colla base DF, l' angolo A coll' angolo D, l' angolo C coll' angolo F, ed il triangolo ABC col triangolo DEF; ma le grandezze che si combaciano sono uguali (1). Dunque la base AC è uguale alla base DF, l' angolo A all' angolo D, l' angolo C all' angolo F, ed il triangolo ABC al triangolo DEF. Per la qual cosa sono i detti triangoli perfettamente uguali. Ch' è ciò, che b. d.

---

(1) *Ass. 9.*

PROP. III. TEOR. III.

Se due triangoli hanno due angoli respettivamente uguali a due angoli, e di più un lato uguale ad un lato, o che sieno i lati adjacenti agli angoli uguali; o gli opposti a due angoli uguali; saranno tali triangoli perfettamente uguali.

Sieno (*Fig. 9.*) ABC, DEF due triangoli, che abbiano l'angolo A uguale all'angolo D, l'angolo C uguale all'angolo F, e abbiano di più, uguali o i lati AC, DF adjacenti a detti angoli, ovvero i lati AB, DE opposti ai due angoli uguali C, ed F. Dico, che tali triangoli sono perfettamente uguali.

Dim. I. Sieno uguali i lati AC DF adjacenti agli angoli uguali. Concepiscasi il triangolo ABC posto sul triangolo DEF, in modo però, che il punto A cada sul punto D, ed il lato AC su 'l lato DF; per l'uguaglianza di tali lati, caderà ancora il punto C sul punto F; ed essendo gli angoli A, e C respettivamente uguali agli angoli D, ed F, caderanno ancora il lato AB su 'l lato ED, e CB su FE, e conseguentemente il punto B sul punto F. Onde combaciandosi tra di loro i suddetti triangoli, saranno perfettamente uguali.

II. Sieno uguali i lati AB, DE opposti agli angoli uguali C, ed F. Si concepisca di nuovo il triangolo ABC situato sull'altro DEF, ma con legge tale, che il punto A cada sul punto D, ed il lato AB su 'l lato DE, caderà per l'uguaglianza di questi lati anche il punto B sul punto E; e per essere di più uguali non solo gli angoli A, e D, ma ancora C, ed F, caderanno eziandio il lato AC su 'l lato DF, il lato BC su 'l lato EF, ed il punto C sul punto

F; altrimenti gli angoli C, ed F non sarebbero più uguali (1). Dunque combaciandosi fra loro i triangoli ABC, DEF: sono perfettamente uguali. Ch' è ciò, che b. d.

CAPO II.

DE' PROBLEMI PIU' SEMPLICI DELLA GEOMETRIA PIANA.

PROP. IV. PROB. I.

Data una linea retta terminata, formare sopra di essa un triangolo equilatero.

Risoluzione. Sia (*Fig. 10.*) AB la retta data. Si prenda per centro il punto A, e per intervallo la retta AB, si descriva il cerchio BCD, di poi preso per centro B, e per intervallo BA, si descriva un' altro cerchio ACE (2). Finalmente dal punto C dove s' intersecano le periferie di questi cerchi ai punti A, e B si tirino le due rette CA, CB. Dico essere ACB il triangolo equilatero ricercato.

Dim. Essendo il punto A centro del cerchio BCD, saranno le rette AC, AB tra loro uguali, come raggi dello stesso cerchio (3); e per la medesima ragione, essendo il punto B centro del cerchio ACE, sarà BC uguale a BA. Sicchè alla terza AB l' è uguale tanto AC quanto BC; ma le grandezze uguali ad una terza sono anche uguali tra loro (4). Dunque AC è uguale a CB. Laonde tutte e tre queste rette AC, CB, BA

(1) *Avver. alla def. 13.*
(2) *Post. 3.*
(3) *Defin. 23.*
(4) *Prin. as.*

essendo uguali, sarà ACB il triangolo equilatero ricercato (1). Ch' è ciò che b. fare, e dimostrare.

PROP. V. PROB. II.

Data una linea retta, ed un punto, tirare dal dato punto un' altra retta uguale alla data.

Ris. Sieno (*Fig. 11.*) BC la data retta, ed A il punto dato. Da A a B si tiri la retta AB, e sopra di essa si formi il triangolo equilatero ADB (2), i di cui lati DA, DB si prolunghino verso E ed F; di poi preso per centro B, e per intervallo BC, si descriva il cerchio CMO, il quale con la sua periferia sega la retta DF nel punto M. Finalmente preso D per centro, e DM per intervallo si descriva il cerchio NML, questo con la sua periferia divide la retta DE in L. Dico essere AL la retta ricercata.

Dim. Essendo il punto D centro del cerchio LMN, saranno i suoi raggi DL, DM uguali (3); ma per il triangolo equilatero ADB, DA è uguale a DB (4). Sicchè se da DL, e DM si toglieranno DA, e DB perchè da due grandezze uguali si tolgano porzioni uguali, rimarranno AL, e BM anche uguali (5); ma per essere il punto B centro del cerchio CMO, BC è ancora uguale a BM. Dunque essendo alla terza BM uguale sì AL, che BC, sarà AL uguale a BC (6). Sic-

(1) *Defin. 18.*
(2) *Prop. 4.*
(3) *Defin. 23.*
(4) *Defin. 18.*
(5) *Ass. 3.*
(6) *Ass. 1.*

chè dal dato punto A s' è tirata la retta AL uguale alla data BC. Ch' è quel tanto, che b. f., e d.

PROP. VI. PROB. III.

Date due rette disuguali, tagliare dalla maggiore una porzione che sia uguale alla minore.

Ris. Sieno delle due rette date, (*Fig.* 12.) AB la maggiore, e CD la minore. Dal dato punto A si tiri la retta AE uguale a CD (1); di poi preso per centro A e per intervallo AE, si descriva il cerchio EFG, questo con la sua periferia sega la retta AB nel punto F. Dico che AF è la porzione ricercata uguale a CD.

Dim. Essendo il punto A centro del cerchio EFG, sarà AE uguale ad AF (2); ma per la costruzione AE è anche uguale a CD. Sicchè essendo alla terza AE uguale tanto AF, quanto CD, sarà AF uguale a CD (3). Dunque dalla retta maggiore AB si è tagliata la porzione AF uguale alla minore CD. Ch' è ciò, che b. f. e d.

---

(1) *Prop.* 5.
(2) *Defin.* 23.
(3) *Ass.* 1.

PROP. VII. PROB. IV.

Date tre rette tali, che ognuna di esse sia minore della somma dell' altre due, formare un triangolo, che abbia i tre lati respettivamente uguali alle tre rette date.

Ris. Sieno A, B, C (*Fig. 13.*) le tre rette date. Si tiri una retta indefinita DE, dalla quale si tagli DF uguale ad A, FG uguale a B, e GH uguale a C. Di poi preso per centro F, e per intervallo FD, si descriva il cerchio DLO, e preso G per centro, e GH per intervallo si descriva un' altro cerchio HLP (1); finalmente dal punto L dove s' intersecano le periferie di questi cerchi ai punti F, e G si tirino le rette LF, LG. Dico essere FLG il triangolo ricercato.

Dim. Essendo il punto F centro del cerchio DLO, sarà DF uguale ad FL, come raggi del medesimo cerchio, e per la stessa ragione, essendo G centro del cerchio HLP, sarà GH uguale a GL; ma per la costruzione sono DF uguale ad A, e GH uguale a C. Dunque saranno ancora FL uguale ad A, e GL uguale a C; e di più eziandio per la costruzione FG uguale a B. Sicchè s' è formato il triangolo FLG i di cui lati LF, FG, GL sono respettivamente uguali alle tre rette date A, B, C. Ch' è quel tanto, che b. f., e d.

---

(1) *Post. 3.*

PROP. VIII. PROB. V.

Dato un punto in una linea retta, dato un' angolo rettilineo, formare nel dato punto un' altr' angolo uguale al dato.

Ris. Sia A (*Fig.* 14.) il punto dato nella retta AB, e CDE l' angolo rettilineo dato. Presi ne' lati CD, DE ad arbitrio i punti F, e G, s' unisca FG; indi prolungata AB verso H, ed I; si taglino da essa AH uguale a DG, AB uguale a DF, e BI uguale ad FG, e presi per centri i punti A, e B, e per intervalli le rette AH, BI si descrivano i due cerchi HLM, ILN; finalmente dal punto L, nel quale si segnano le periferie di questi cerchi, ai punti A, e B si tirino le rette LA, LB. Dico, che BAL è l' angolo ricercato.

Dim. Essendo il punto A centro del cerchio HLM saranno i suoi raggi AH, AL fra loro uguali; ma per la costruzione AH è uguale a DG; sicchè anch' il lato AL è uguale a DG; è di più il lato AB uguale a DF; e per essere il punto B centro del cerchio ILN sarà BI uguale a BL, ma BI è uguale ad FG; onde ancora la base BL è uguale alla base FG; e perciò sarà l'angolo BAL uguale all'angolo FDG (1). Dunque nel dato punto A s' è formato l' angolo BAL uguale al dato CDE. Ch'è quel tanto, che b. f., e d.

AVVERTIMENTO.

I. Si è nella precedente proposizione, dall' essere i lati AB, AL uguali respettivamente ai lati DF,

(1) *Prop.* 1.

DG, e la base BL uguale alla base FG, conchiuso essere eziandio l'angolo BAL uguale all'angolo FDG; nulladimeno però la vera, ed assoluta misura d'un' angolo qualunque, non è la sua base o altra linea retta; ma l'arco circolare, che col suo vertice come centro, e con un dato intervallo si descrive tra i suoi lati: così dell'angolo BAC (*Fig.* 15.) la vera misura è l'arco BC, in guisa che di quanti gradi, e minuti sarà l'arco BC, di altrettanti sarà ancora l'angolo BAC.

Per concepire come gli archi de' cerchi sono le misure degli angoli, si può imaginare, che il lato AC combaciandosi alle prime col lato AB, s' allontani poscia dal medesimo con muoversi intorno al punto A; egli è evidente, che nella stessa proporzione, che il lato AC s' è allontanato dal lato AB, il punto C s' è allontanato dal punto B, in modo che l'arco BC esprime la quantità del camino fatto dal punto C, preso nel lato AC, per allontanarsi dal lato AB. Onde se il lato AC si fosse allontanato per il doppio dal lato AB, siccome l'angolo sarebbe stato due volte maggiore del primo, così ancora due volte maggiore sarebbe stato l'arco, che indica il camino fatto dal punto C per allontanarsi dal punto B.

Sieno nel cerchio ACBD il diametro CD (*Fig.* 16.) perpendicolare al diametro AB; saranno i quattro angoli COB, BOD, DOA, AOC retti; e conseguentemente uguali. Dunque le loro misure, cioè gli archi CB, BD, DA, AC saranno anche uguali; onde ognuno d' essi chiamato volgarmente quadrante, per essere la quarta parte della periferia, sarà di 90 gradi, perciò ogn' angolo retto è di 90, due retti di 180, e quattro retti di 360 gradi.

II. In pratica per conoscere di quanti gradi sia un' angolo, o per formare un' angolo d' un dato nu-

mero di gradi, si fa uso d' un semicerchio d' ottone diviso in 180 gradi nel seguente modo.

Sia dato l' angolo OPM (*Fig. 17.*) il di cui valore si vuole determinare. Si ponga il centro del semicerchio sul vertice P dell' angolo dato, ed il raggio PL su 'l lato PM dello stesso angolo; di quanti gradi sarà l' arco LO compreso tra i lati PO, PM, di tanti appunto sarà il valore dell' angolo OPM.

Sia in oltre da formarsi nel punto P della retta PM un determinato angolo, per esempio di 39 gradi. Si disponga il semicerchio in modo, che il suo cerchio cada sul punto P, ed il raggio PL sulla retta PM, di poi numerati da L ad O 39 gradi, s' unisca OP: sarà l'angolo OPM di gradi 39.

PROP. IX. PROB. VI.

Dato un'angolo rettilineo dividerlo in due parti uguali.

Ris. Sia ABC (*Fig.* 18.) l'angolo rettilineo dato. Si prenda nel lato AB ad arbitrio il punto D, e dal lato maggiore BC si tagli la porzione BE uguale a BD (1); di poi congiunta DE, si formi su di essa il triangolo equilatero DFE (2), e finalmente dal punto B al punto F si tiri la retta BF. Dico che BF ha diviso l' angolo rettilineo ABC in due parti uguali.

Dim. Essendo per la costruzione BD uguale a BE, e BF comune, saranno i due lati BD, BF del triangolo DBF uguali respettivamente ai due lati EB, BF del triangolo EBF; è di più la base DF uguale

---

(1) *Prop.* 6.
(2) *Prop.* 4.

alla base EF (1). Sicchè sarà l'angolo DBF uguale all'angolo EBF. Dunque il dato angolo ABC s'è diviso in due parti uguali. Ch'è ciò, che b. f. e d.

COROLLARIO.

Se ciascuno degli angoli ABF, CBF di nuovo si dividerà in due parti uguali, e successivamente poi ognuna delle rimanenti parti, s'avrà l'angolo rettilineo diviso in 4, 8, 16, 32, ec. parti uguali. Sicchè qualunque angolo rettilineo si può geometricamente dividere in 4, 8, 16, 32, 64, ec. parti uguali.

AVVERTIMENTO.

Sebbene l'angolo rettilineo si possa dividere in 2, 4, 8, ec. parti uguali: nulladimeno però il dividerlo in 3, 5, o altre parti uguali differenti dalle sopradette, è assolutamente impossibile nella Geometria elementare, essendo un problema, che appartiene alla Geometria sublime; ma l'angolo retto però, con metodi particolari, si può dividere in 3, ed in 5 parti uguali, come a suo luogo vedremo.

Voledosi meccanicamente dividere (*Fig.* 15.) un angolo rettilineo in qualunque numero di parti eguali, si potrà fare nel seguente modo: si prenda per centro il vertice A dell'angolo dato, e descritto con qualunque intervallo l'arco BC tra i suoi lati, si divida questo in tante parti uguali in quante appunto si vuol dividere l'angolo; le rette tirate dal vertice ai punti delle divisioni, divideranno l'angolo BAC in altrettante parti uguali.

---

(1) *Def.* 18.

PROP. X. PROB. VII.

Data una linea retta terminata dividerla in due parti uguali.

Ris. Sia AB (*Fig.* 19.) la data retta : sopra di essa si formi il triangolo equilatero ACB (1), e l'angolo ACB si divida in due parti uguali con la retta CD. Dico che s'è divisa AB in due parti uguali nel punto D.

Dim. Essendo AC uguale a CB , come lati del triangolo equilatero , e CD comune , saranno i due lati AC , CD del triangolo ACD , uguali respettivamente ai due lati CB , CD del triangolo BCD ; è ancora l'angolo ACD per la costruzione uguale all' angolo BCD. Dunque la base AD è uguale alla base DB , e perciò la data retta AB si è divisa in due parti uguali nel punto D. Ch' è ciò , che b. f. e d.

(1) *Prop.* 4.

CAP. III.

DELLE LINEE RETTE, CHE FRA LORO S' INCONTRANO O PERPENDICOLARMENTE, OD OBLIQUAMENTE.

PROP. XI. PROB. VIII.

Dato un punto in una linea retta, innalzare da esso una perpendicolare alla retta data.

Ris. Sia C il punto dato nella retta (*Fig.*20.) AB. In CA ad arbitrio si prenda il punto D, e tagliata da CB la porzione CE uguale a CD (1), si formi su DE il triangolo equilatero DEF (2); e finalmente dal punto C al punto F si tiri la retta CF. Dico, che CF è la ricercata perpendicolare.

Dim. Per la costruzione DC è uguale a CE, e CF comune. Sicchè i due lati DC, CF dal triangolo DCF sono respettivamente uguali ai due lati EC, CF del triangolo EGF; sono di più eguali le di loro basi FD, FE come lati del triangolo equilatero DFE. Dunque gli angoli FCD, FCE sono eguali, ed in conseguenza retti; e perciò CF è perpendicolare ad AB (3). Laonde dal punto C s'è alzata CF perpendicolare ad AB. Ch'è quel tanto, che b. f., e d.

---

(1) *Prop.* 6.
(2) *Prop.* 4.
(3) *Def.* 12.

PROP. XII. PROB. XI.

Dato un punto fuori la direzione d' una linea retta, abbassare da essa una perpendicolare alla retta data.

Ris. Sia (*Fig.* 21.) C il punto dato fuori la direzione della retta AB. Si prenda ad arbitrio il punto D che stia però dall'altra parte di AB riguardo al punto C, e si unisca CD, indi col centro C, ed intervallo CD si descriva l'arco circolare EDF, che interseca AB ne' punti E ed F; finalmente divisa EF in due parti uguali nel punto O, si tiri da C ad O la retta CO. Dico essere CO la perpendicolare ricercata.

Dim. Per la costruzione EO è uguale ad OF, e CO comune. Sicchè (congiunti i raggi CE, CF) sono i due lati EO, OC del triangolo EOC, uguali respettivamente ai due lati FO, OC del triangolo FOC; sono ancora uguali le basi CE, CF (1); laonde uguali saranno gli angoli COF; e perciò CO è perpendicolare ad AB (2). Dunque dal punto dato C s' è abbassata CO perpendicolare alla data AB. Ch' è quel tanto, che b. f., e d.

AVVERTIMENTO.

Si possono in pratica innalzare, e abbassare facilissimamente da dati punti le perpendicolari su date rette coll' ajuto della *squadra*, strumento inventato da Pitagora, come attesta Vitruvio nel lib. 9. Questo vien composto da due righe (*Fig.* 21.) DC, CE di legno, o di metallo, unite però in modo, che formino un

---

(1) *Defin.* 23.
(2) *Defin.* 12.

angolo retto. Volendosi dunque, a cagion d'esempio, dal punto D abbassare sopra di AB una perpendicolare, si deve adattare il lato EC della squadra sulla retta AB, in modo però, che l'altro lato CF passi per il punto D; la retta tirata rasente il lato FC sarà la perpendicolare ricercata. Per esaminare poi se la squadra sia esatta, si deve la medesima rivoltare dall' altra parte di AC, cioè verso il punto B; se si osserverà, che combaciando il lato EC con la retta CB, l' altro lato CF combacia con la retta tirata CD, sarà in tal caso esatta; altrimenti sarà erronea.

PROP. XIII. TEOR. IV.

Se una retta cade su d' un' altra; forma gl' angoli da ambedue le parti, cioè a destra e sinistra o retti, o insieme presi uguali a due retti.

Dim. Sulla retta (*Fig.* 23.) AB in due modi vi può cadere un' altra retta linea, o perpendicolarmente come CD, o obliquamente come DE: se vi cade perpendicolarmente come CD, è chiaro, che i due angoli CDA, CDB sono uguali, e conseguentemente retti: se poi vi cade obliquamente come ED, in tal caso col centro D, ed intervallo DE si descriva su AB il semicerchio AEB. Venendo gli angoli EDA, EDB misurati dalla mezza periferia AEB saranno insieme presi di 180 gradi (1), e perciò uguali a due retti. Ch' è ciò, che b. d.

---

(1) *Avvert.* 8. *Prop.* 8.

COROLLARIO.

Se dallo stesso punto D al dissopra di AB si tireranno altre rette ad arbitrio; perchè queste altre non fanno che dividere gli angoli EDA, EDB, senza però aumentarli; perciò tutti gli angoli da esse rette formati saranno uguali a due retti; ma se poi dal punto D si tireranno altre rette al dissotto di AB; venendo in tal caso tutti gli angoli formati dalle rette tirate da D tanto sopra, quanto sotto di AB, misurati dall'intera periferia, sarà il loro valore di 360 gradi, e conseguentemente uguale a 4 retti. Dunque tutti gli angoli formati da quante rette si vogliono tirale da un punto sopra uno stesso piano sono uguali a 4 retti.

PROP. XIV. TEOR. V.

Se dall' estremo d' una linea retta se ne tirano altre due per direzioni opposte, in modo, che formino con la prima gli angoli dall' una parte, e dall' altra uguali a due retti, saranno tali rette a dirittura.

DAl punto D estremo della retta CD (*Fig.* 24.) si tirino le due altre DA, DB, in modo, che la somma degli angoli CDA, CDB sia eguale a due retti. Dico che DA è a dirittura con DB; cioè, che formano insieme una sola retta continuata.

Dim. Se si niega essere DB a dirittura con DA; si tiri, se mai è possibile, da D la retta DE, che sia a dirittura con DA. Essendo ADE una retta continuata, sulla quale è cascata l'altra CD, sarà la somma degli angoli CDA, CDE uguale a due retti (1)

(1) *Prop.* 13.

e perciò uguale alla somma degli angoli CDA, CDB; onde toltone il comune CDA, sarà l'angolo CDE uguale all'angolo CDB, cioè la parte uguale al tutto; ma ciò ripugna. Dunque ripugna ancora, che DB non sia a dirittura con DA. Ch'è quel tanto, che b. d.

PROP. XV. TEOR. VI.

Se due rette s'intersecano, formano gli angoli verticali tra loro uguali.

Si intersechino le rette AB, CD (*Fig.* 25.) scambievolmente nel punto E. Dico essere gli angoli verticali tra loro uguali, cioè l'angolo AEC eguale all'angolo DEB, e l'angolo AED eguale all'angolo CEB.

Dim. Essendo AE cascata su CD, sarà la somma degli angoli AEC AED uguale a due retti, similmente essendo DE cascata su AB, sarà la somma degli angoli DEA, DEB anch'eguale a due retti (1); ma tutt'i retti sono fra loro uguali (2). Dunque sarà la somma di AEC, AED uguale alla somma di DEA, DEB; e perciò toltone il comune AED, rimarrà l'angolo AEC uguale al suo verticale DEB, dello stesso modo si dimostra, che l'angolo AED è uguale al suo verticale CEB. Sicchè se due rette ec. Ch'è ciò, che b. d.

---

(1) *Prop.* 13.
(2) *Ass.* 12.

Se da un punto preso in una linea retta si tirano altre due rette, che formino con la prima gli angoli verticali tra loro uguali, formeranno queste una sola retta continuata.

Dal punto E (*Fig.* 25.) preso ad arbitrio nella retta AB si tirino l'altre due EC, ED in modo, che formino gli angoli verticali AEC, DEB tra loro uguali. Dico, che EC, ED formano una retta continuata.

Dim. Essendo l'angolo AEC uguale all'angolo DEB, aggiuntovi di comune l'angolo AED, sarà la somma degli angoli AEC, AED uguale alla somma degli angoli DEA, DEB; ma questi sono uguali a due retti (1). Dunque uguali a due retti sono eziandio gli angoli AEC, AED; e perciò EC, ED formano una retta continuata (2). Ch'è quel tanto che b.d.

---

(1) *Prop.* 13.
(2) *Prop.* 14.

CAP. IV

DELLE LINEE RETTE PARALLELE.

DEFINIZIONE.

Se due rette (*Fig.* 26.) AB , CD esistenti nel medesimo piano vengono segate da una terza EF , formeranno varj angoli. I due AGH , GHD , ovvero BGH , GHC diconsi *alterni*. Gli angoli EGB, EGA, FHD , FHC si chiamano *esterni*; e relativamente ad ogni uno di questi si dicono *interni opposti* gli angoli GHD , GHC , HGB , HGA. Finalmente si diranno angoli *interni situati dalla medesima parte* tanto i due BGH , GHD , quanto i due AGH, GHC.

PROP. XVII. TEOR. VIII.

Se due rette, esistenti nel medesimo piano vengono intersecate da una terza , e formano gli angoli alterni uguali, saranno tali rette parallele.

Sieno (*Fig.* 26.) AB , e CD due rette esistenti nello stesso piano , le quali segate dalla terza EF , formino gli angoli alterni AGH , GHD fra loro uguali. Dico esser tali rette parallele.

Dim. Imperocchè abbassate dai punti G, ed H su CD , ed AB , le respettive perpendicolari GL , HI , i triangoli GLH , HIG hanno l'angolo GHL uguale all' angolo IGH per l' ipotesi , l'angolo GLH uguale all'angolo GHI , come retti , e di più il lato GH comune. Dunque avranno ancora il lato GL uguale al lato IH (1). Sicchè essendo uguali le perpendico-

(1) *Prop.* 3.

lari abbassate tra le rette AB , CD , sono queste tra loro parallele (1). Ch' è ciò , che b. d.

COROLLARIO.

Avendo i triangoli HIG , GLH , come s' è dimostrato , due angoli respettivamente uguali a due angoli, ed il lato GH comune, sono in conseguenza perfettamente uguali (2) ; e perciò il lato IG è uguale al lato HL. Sicchè nelle parallele AB , CD le porzioni IG , HL segate dalle perpendicolari IH , GL sono fra lorouguali.

PROP. XVIII. TEOR. IX.

Se due rette , esistenti nel medesimo piano vengono segate da una terza , e formano o l' angolo esterno uguale al suo interno opposto , o due angoli interni dalla stessa parte uguale a due retti , saranno tali rette parallele.

Sieno AB , (*Fig.* 26.) e CD due rette esistenti nel medesimo piano , le quali segate dalla terza EF formino l' angolo esterno EGB uguale al suo interno opposto GHD , ovvero due angoli interni dalla stessa parte BGH , GHD uguali a due retti. Dico che tali rette AB , CD sono parallele.

Dim. I. Sia l' esterno EGB uguale al suo interno opposto GHD. Essendo l' angolo EGB uguale sì all' angolo GHD , che al suo verticale AGH (3), sarà

---

(1) *Def.* 14.
(2) *Prop.* 3.
(3) *Prop.* 15.

l'angolo AGH uguale all'alterno GHD (1). Dunque AB, CD sono parallele (2).

II. Sieno gl'interni BGH, GHD uguali a due retti. Essendo uguali a due retti sì la somma degli angoli BGH, GHD, che la somma di BGH, AGH (3), sarà la somma di BGH, GHD eguale alla somma di BGH, AGH, onde toltone il comune BGH, rimarrà l'angolo AGH eguale al suo alterno GHD. Sicchè AB, e CD son parallele. Laonde se due rette ec. Ch'è quel tanto, che b. d.

PROP. XIX. TEOR. X.

Se due rette parallele sono intersecate da una terza, formano gli angoli alterni eguali tra loro, l'angolo esterno eguale al suo interno opposto, e la somma degli angoli interni della stessa parte uguale a due retti.

Sieno le due rette parallele (*Fig.* 26.) AB, CD segate dalla terza EF. Dico I. che gli angoli alterni IGH, GHL sono fra loro eguali. II. Che l'esterno EGB è uguale al suo interno opposto GHD. III. Che la somma degl'interni dalla medesima parte BGH, GHD è uguale a' due retti.

Dim. I. S'abbassino dai punti H, e G su AB, e CD le respettive perpendicolari HI, GL. I triangoli IGH, GHL sono fra loro equilateri; essendo IG eguale ad HL (4), IH eguale a GL (5), e GH co-

(1) *Ass.* 1.
(2) *Prop. preced.*
(3) *Prop.* 13.
(4) *Corol. prop.* 17.
(5) *Corol. def.* 14.

mune. Dunque sono equiangoli, e perciò eguali sono l'alterni angoli IGH, GHL.

II. Essendo all'angolo IGH eguale sì l'angolo ECB (1), che l'angolo GHL (2), sarà l'esterno EGB eguale al suo interno opposto GHL (3).

III. L'angolo AGH s'è nella prima parte dimostrato uguale all'angolo GHD, onde aggiuntovi di comune BCH, sarà la somma di ACH, BCH eguale alla somma di BCH, CHD; ma la somma di ACH, BCH è eguale a due retti (4); onde anche la somma di BCH, GHD è uguale a due retti. Dunque se due rette parallele ec. Ch'è quel tanto, che b. d.

PROP. XX. TEOR. XI.

Se due rette sono parallele ad una terza sono anche parallele tra loro.

Sieno le due rette AB (*Fig.* 27.), e CD parallele alla terza EF. Dico, che sono anche parallele fra loro.

Dim. Si tiri la retta GI che intersechi queste tre rette ne' punti G, H, I, essendo AB parallela ad EF, sarà l'angolo AGH eguale al suo alterno HIF, e per essere CD eziandio parallele con EF, sarà l'angolo esterno GHD eguale al suo interno opposto HIF (5); onde essendo all'angolo HIF eguale sì l'angolo AGH, che l'angolo GHD, sarà l'an-

(1) *Prop. 15.*
(2) *Prim. part. di questa.*
(3) *Ass. 1.*
(4) *Prop. 13.*
(5) *Prop. 19.*

golo AGH eguale al suo alterno GHD (1), e perciò AB, CD son parallele. Ch'è ciò, che b. d.

PROP. XXI. TEOR. XII.

Se due rette sono eguali, e parallele, e vengono congiunte dalla stessa parte da due altre rette, saranno anche queste che le congiungono eguali, e parallele.

Sieno AB, CD (*Fig.* 28.) due rette uguali, e parallele, le quali vengono congiunte dall' altre due AC, BD. Dico, che queste due AC, BD son anche eguali e parallele.

Dim. Essendo AB, CD parallele, saranno, congiunta la retta AD, gli alterni BAD, ADC tra loro eguali. Laonde i triangoli ABD, ACD avendo il lato AB eguale al lato CD, il lato AD comune, e l' angolo BAD eguale all' angolo ADC, avranno ancora (2) la base BD eguale alla base AC, e l' angolo BDA eguale all' angolo DAC; ma questi sono alterni per rispetto alle rette AC, BD. Dunque AC, BD non solo sono eguali, ma anche parallele (3); e perciò se due rette ec. Ch'è ciò, che b. d.

---

(1) *Ass.* 1.
(2) *Prop.* 2.
(3) *Prop.* 17.

PROP. XXII. PROBL. X.

Dato un punto fuori la direzione d' una linea retta, tirare pel dato punto un' altra retta, che sia parallela alla data.

Ris. Sia C il punto dato fuori la direzione della retta AB. (*Fig.* 29.) Si prenda in AB ad arbitrio un punto, e sia D, e da C a D tirata la retta CD, facciasi in essa, e propriamente nel punto C l' angolo DCE eguale all' angolo CDB, e si prolunghi EC verso F. Dico essere EF la parallela ricercata.

Dim. Per la costruzione gli angoli alterni ECD, CDB sono eguali. Dunque EF, AB sono parallele (1). Sicchè s' è tirata per lo dato punto C la retta EF parallela ad AB. Ch' è ciò, che b. f., e d.

AVVERTIMENTO.

Si tirerà nel punto C praticamente una parallela ad AB, se congiunta CD, e descritto col centro D l' arco circolare HI, si descriva col centro C, e col medesimo intervallo l' arco LK, e se ne tagli la porzione LK eguale ad IH. La retta EF tirata per gli punti K e C, sarà parallela ad AB: essendo uguali gli angoli alterni KCL, IDH.

Si tirerà però con maggior speditezza, e facilità la ricercata parallela, mediante lo strumento, che volgarmente chiamasi *il Parallelismo*, il quale è composto da due righe di legno, o di ottone, d'eguale larghezza in tutta la loro estensione MN, DO, (*Fig.30.*) congiunte da due altre minori PQ, RS eguali, e pa-

(1) *Prop.* 17.

rallele, in guisa che col moto di queste, le due MN, DO possono acquistare varie distanze, ma però sempre parallele. Onde adattata una riga, per esempio DO sulla data retta AB, l'altra MN si faccia passare pel dato punto C, la retta EF tirata per C rasente la riga MN sarà la parallela ricercata.

CAP. V.

DELLE PROPRIETA' DE' TRIANGOLI SI RIGUARDO AI LATI, CHE AGLI ANGOLI.

PROP. XXIII. TEOR. XIII.

In ogni triangolo prolungato un lato l'angolo esterno è uguale alla somma degli due interni opposti, e tutti e tre gl'interni insieme presi sono eguali a due retti.

RAppresenti ABC (*Fig. 31.*) qualunque triangolo, nel quale il lato BC sia prolungato in D. Dico I. che l'angolo esterno ACD è uguale alla somma dei due interni opposti A, e B. II. che tutti e tre gli angoli del triangolo sono eguali a due retti.

Dim. I. Si tiri pel punto C la retta CE parallela ad AB. Essendo CE parallela a BA, sarà l'angolo esterno EGD uguale all'interno opposto ABC, e l'angolo ECA uguale al suo alterno CAB (1). Dunque l'intero esterno ACD è uguale alla somma de' due interni opposti A, e B.

II. L'angolo ACD s'è dimostrato eguale ai due A, e B; onde aggiuntovi di comune l'angolo ACB

---

(1) *Prop. 18. e 17.*

sarà la somma di ACD, ACB eguale ai tre CAB, ABC, BCA; ma la somma di ACD, ACB è uguale a due retti (1). Sicchè eziandio i tre CAB, ABC, BCA, insieme presi sono uguali a due retti. Ch'è ciò che b. d.

COROLLARIO.

I. Essendo l'angolo esterno ACD eguale alla somma di A, e B, sarà per conseguenza maggiore di ciascheduno degl'interni opposti; cioè sì di A, che di B.

II. Poichè tutti e tre gli angoli d'un triangolo sono eguali a due retti; ne siegue che due soli angoli sono minori di due retti; e di più, che se in un triangolo un'angolo è retto, o ottuso, i due rimanenti devono necessariamente essere acuti.

III. Non potendosi in un triangolo avere più d'un'angolo retto; è chiaro, che da un punto dato fuori la direzione d'una linea retta, non si può abbassare che una sola perpendicolare.

IV. Se due angoli d'un triangolo sono respettivamente uguali a due angoli d'un'altro triangolo, ovvero a somma de'due primi uguaglia la somma de'due secondi sempre il terzo angolo del primo è uguale al terzo del secondo, per essere i respettivi complementi a due retti, cioè a 180 gradi.

---

(1) *Prop.* 13.

AVVERTIMENTO.

Questo nobile teorema inventato da Pitagora, giusta il riferire d' Eudemo geometra antico è d' un grandissimo uso in tutta la Matematica ; come si può incominciare a vedere da 2 Teoremi, che soggiugniamo.

TEOREMA I.

Tutti gli angoli interni di qualsivoglia figura rettilinea sono uguali a tanti retti, quanti ne dinota il doppio numero de' suoi lati diminuito di 4.

Dim. RAppresenti ABCDE (*Fig. 32.*) qualunque figura rettilinea, nella quale preso ad arbitrio il punto O, si tirino a tutti i suoi angoli le rette, OA, OB, OC, OD, OE; queste divideranno la figura in tanti triangoli, quanti sono i lati della medesima ; e poichè i tre angoli di ciaschedun triangolo sono uguali a due retti ; sarà la somma di tutti gli angoli di tali triangoli uguale a tanti retti, quanti ne dinota il doppio numero de' lati della figura ; ma gli angoli nel punto O sono uguali a quattro retti (1). Sicchè, se dall' intera somma si toglieranno quattro retti, i rimanenti angoli alle basi de' triangoli, cioè gli angoli A, B, C, D, E della figura saranno uguali a tanti retti, quanti ne disegna il doppio numero de' suoi lati diminuito di quattro.

---

(1) *Corol. alla prop. 13.*

TEOREMA II.

Tutti gli angoli esterni di qualunque figura sono uguali a quattro retti.

Dim. SI prolunghino a dirittura tutt' i lati della figura ABCDE; (*Fig. 33.*) sarà ciascun angolo interno, una col suo respettivo esterno uguale a due retti. Sicchè la somma di tutti gl' interni, ed esterni è uguale a tanti retti, quanti ne dinota il doppio numero de' lati della figura; onde se da una tal somma ti toglieranno gl' interni, che per il precedente teorema sono eguali a tanti retti, quanti ne dinota il doppio numero de' lati della figura diminuito di quattro, rimarranno i soli esterni uguali a quattro retti.

PROP. XXIV. TEOR. XIV.

Se dagli estremi d' un lato del triangolo si tirano dentro di esso due rette, che s' incontrino in un punto; saranno tali rette minori de' due lati del triangolo; l' angolo però, che formano sarà maggiore dell' angolo formato dai suddetti due lati.

DAgli estremi A, e B (*Fig. 34.*) del lato AB si tirino dentro del triangolo ACB le due rette AD, BD, che s' uniscano nel punto D. Dico I., che queste rette AD, BD sono minori de lati AC, CB. II., che l' angolo ADB è maggiore dell' angolo ACB.

Dim. I. Si prolunghi AD verso E fino a tanto, che s' unisca con CB in E. Nel triangolo BED,

il lato BD è minore de' due DE, EB (1); onde aggiuntovi di comune AD saranno, AD, DB minori di AE, EB, ma pel triangolo ACE il lato AE è minore de' due AC, CE, perciò aggiuntovi EB di comune, saranno AE, EB minori di AC, CB. Dunque essendo AD, DB minori di AE, EB, saranno molto minori de' lati AC, CB.

II. Nel triangolo BED il lato EDA prolungato in A. Sicchè l' angolo esterno BDA è maggiore dell' interno opposto BEA (2); ma per la stessa ragione nel triangolo ACE, l' angolo esterno BEA è maggiore dell' interno opposto BCA. Dunque l' angolo BDA è molto maggiore di BCA. Laonde se dagli estremi ec. Ch' è quel tanto, che b. d.

PROP. XXV. TEOR. XV.

In ogni triangolo isoscele gli angoli al disopra della base sono fra loro uguali, e prolungati i lati uguali, anche gli angoli al dissotto della base sono uguali tra loro.

RAppresenti ABC (*Fig. 35.*) un triangolo isoscele, i di cui lati uguali AB, AC si prolunghino verso D, ed E. Dico essere tra loro uguali tanto gli angoli ABC, ACB esistenti sopra la base BC, quanto gli angoli CBD, BCE, che sono al dissotto della medesima base.

Dim. Si divida BC in due parti uguali in F. (3), e s' unisca AF. Essendo ne' triangoli ABF, ACF il

(1) *Avvert. alla def. 18.*
(2) *Corol. 1. prop. 23.*
(3) *Prop. 10.*

lato AB uguale al lato AC, e il lato BF uguale al lato CF, e la base AF comune: saranno gli angoli ABF, ACF tra loro uguali. In (1) oltre gli angoli CBD, BCE essendo i respettivi complimenti a due retti degli angoli uguali ABC, ACB, anch'essi sono uguali fra loro. Dunque in ogni triangolo isoscele ec. Ch'è ciò, che b. d.

COROLLARIO.

Sicchè se un triangolo sarà equilatero, sarà eziandio equiangolo, e prolungati i suoi tre lati, anche i tre esterni angoli saranno uguali.

PROP. XXVI. TEOR. XVI.

Se in un triangolo due angoli sono uguali; i lati opposti a tali angoli sono ancora uguali.

Sia ABC (*Fig. 36.*) un triangolo, il quale abbia gli angoli A, e C tra loro uguali. Dico, che i lati BA, BC a tali angoli opposti sono anche uguali.

Dim. Se si niega essere il lato AB uguale al lato BC, sarà il lato AB o maggiore, o minore di BC; sia s'è possibile maggiore, onde se ne tagli la porzione AD uguale a BC (2), e s'unisca DC. Essendo ne' triangoli DAC, BCA il lato DA uguale al lato BC, il lato AC comune, e l'angolo DAC uguale all'angolo BCA, sarà il triangolo DAC uguale al triangolo BCA (3), cioè la parte uguale al tutto;

---

(1) *Prop.* 1.
(2) *Prop.* 6.
(3) *Prop.* 1.

ma ciò ripugna. Sicchè ripugna ancora, che il lato AB sia maggiore di BC; dello stesso modo si dimostra, che non può esser minore. Dunque il lato AB è necessariamente uguale al lato BC. Ch'è ciò, che b. d.

COROLLARIO.

È chiaro dunque, che se un triangolo è equiangolo, è anche equilatero.

PROP. XXVII. TEOR. XVII.

Se in un triangolo un lato è maggiore d' un' altro; l' angolo opposto al lato maggiore, è ancora maggiore dell' angolo opposto al lato minore.

NEl triangolo ABC (*Fig. 37.*) sia il lato AC maggiore del lato AB. Dico, essere l' angolo ABC parimente maggiore dell' angolo ACB.

Dim. Dal lato maggiore AC si tagli la porzione AD uguale ad AB, e si congiunga BD. Essendo AD uguale ad AB, sarà il triangolo ABD isoscele, e perciò gli angoli ABD, ADB saranno uguali tra loro (1); ma l' angolo ABC è maggiore di ABD (2). Dunque sarà anche maggiore di ADB. In oltre nel triangolo BCD il lato CD è prolungato in A; sicchè l' angolo esterno ADB è maggiore dell' interno opposto ACB. Dunque l' angolo ABC, essendo maggiore di ADB, è molto maggiore dell' angolo ACB. Ch' è ciò, che b. d.

---

(1) *Prop. 25.*
(2) *Ass. 8.*

PROP. XXVIII. TEOR. XVIII.

Se in un triangolo un angolo è maggiore d' un' altro, il lato opposto all' angolo maggiore è anche maggiore del lato opposto all'angolo minore.

Abbia il triangolo ABC (*Fig. 37.*) l'angolo ABC maggiore dell' angolo ACB. Dico, essere il lato AC parimente maggiore del lato AB.

Dim. Se si niega essere il lato AC maggiore di AB, sarà AC o uguale, o minore di AB; ma non può essergli uguale, poichè sarebbe l' angolo ABC uguale all' angolo ACB (1), lo che ripugna all' ipotesi; nè meno può esserne minore, perchè in tal caso sarebbe l' angolo ABC minore dell' angolo ACB (2), qual cosa eziandio è contraria all' ipotesi. Dunque il lato AC non essendo uguale, nè minore deve necessariamente esser maggiore di AB. Ch' è ciò, che b. d.

(1) *Prop. 25.*
(2) *Prop. 27.*

CAP. VI.

DELLE PROPRIETA' DE' PARALLELOGRAMMI E DELL' UGUAGLIANZA COSI' DE' PARALLELOGRAMMI, COME ANCORA DE' TRIANGOLI.

PROP. XXIX. TEOR. XIX.

In ogni parallelogrammo sono tra loro uguali sì gli angoli opposti, che i lati opposti, e la diagonale lo divide in due triangoli uguali.

Sia ABDC (*Fig 38.*) un parallelogrammo, nel quale si tiri la diagonale AD. Dico, che sono uguali fra loro, sì gli angoli opposti BAC, BDC, e DBA, DCA, come ancora i lati opposti AB, CD, e CA, DB; e finalmente, che la diagonale AD lo divide in due triangoli uguali.

Dim. Essendo BC un parallelogrammo, sarà la retta AB parallela con CD, e CA parallela con DB; onde sarà sì l'angolo BAD; uguale al suo alterno ADC, che l'angolo CAD uguale all'alterno suo ADB; e perciò l'intero angolo BAC è uguale all'intero BDC. Di più ne' triangoli BAD, ACD, i due angoli del primo BAD, ADB sono respettivamente uguali ai due angoli del secondo CDA, DAC, il lato AD è comune. Dunque sarà ancora (1) l'angolo B uguale all'angolo C, il lato AB uguale al lato CD, il lato BD uguale a CA, ed il triangolo BAD uguale al triangolo ACD. Ch'è ciò, che b. d.

(1) *Prop.* 3.

COROLLARIO.

I. Essendo AB uguale a CD, e CA uguale a DB; è chiaro, che se AB sarà uguale a CA, tutti e quattro i lati AB, BD, DC, CA saranno uguali. Sicchè se in un parallelogrammo due lati, che formano un' angolo sono uguali, il parallelogrammo sarà equilatero.

II. Per le parallele AB, DC, gli angoli BAC, ACD sono uguali a due retti (1); onde se ABC sarà retto, retto sarà ancora ACD; e poichè ne' parallelogrammi gli angoli opposti sono uguali, saranno ABD, BDC eziandio retti. Dunque se in un parallelogrammo un' angolo è retto, tutti gli altri sono anche retti; e perciò sarà rettangolo.

PROP. XXX. TEOR. XX.

In ogni parallelogrammo, i complementi degli altri due parallelogrammi, che sono intorno la sua diagonale, sono tra loro uguali.

Nella diagonale AC (*Fig. 38.*) del parallelogrammo BD, preso ad arbitrio il punto O, si tirino pel medesimo le rette EF, GH parallele respettivamente ai lati AD, AB; queste divideranno il parallelogrammo BD in altri quattro, de' quali i due GE, FH sono intorno la diagonale AC; gli altri due poi DO, OB sono i complementi de' primi EG, HF. Dico, essere tali complementi DO, OB tra loro uguali.

Dim. Dividendo la diagonale il parallelogrammo in due triangoli uguali (2), saranno i triangoli ADC,

---

1) *Prop.* 19.
2) *Prop.* 29.

AGO, OFC uguali respettivamente ai triangoli ABC, AEO, OHC. Dunque se dal triangolo ADC si toglieranno i due AGO, OFG, e dal triangolo ABC i due AEO, OHG, rimarranno i complementi DO, OB anche uguali tra loro (1). Ch'è, ciò, che b. d.

PROP. XXXI. TEOR. XXI.

I parallelogrammi, ed i triangoli, che hanno la medesima base, e sono racchiusi tra le medesime parallele sono fra loro uguali.

ABbiano sì i parallelogrammi AC, AF, (*Fig.39.*) che i triangoli DAB, EAB la stessa base AB, e sieno racchiusi tra le medesime parallele AB, DF. Dico che tanto i suddetti parallelogrammi, quanto i triangoli sono fra loro uguali.

Dim. Essendo i lati opposti de' parallelogrammi tra loro uguali (2); sarà sì DC, che EF uguale ad AB, e perciò DC sarà uguale ad EF (3), onde aggiuntovi di comune CE, saranno DE, CF tra loro uguali; è in oltre AD uguale a CB, ed AE uguale a BF (4). Sicchè i triangoli ADF, BCF essendo tra loro equilateri, sono uguali (5), e perciò toltone il comune triangolo CLE, uguali rimarranno ancora i trapezj ALCD, BLEF, ed aggiunto a questi trapezj il comune triangolo ALB; saranno i parallelogrammi AC, AF uguali tra loro; ed in conseguenza uguali saranno ancora le loro metà, cioè i triangoli ADB,

(1) *Ass. 3.*
(2) *Prop. 29.*
(3) *Ass. 1.*
(4) *Prop. 29.*
(5) *Prop. 1.*

AEB. Dunque i parallelogrammi ec. Ch' è ciò, che b. d.

COROLLARIO.

Essendo i triangoli DAB, EAB tra loro uguali; è chiaro, che il parallelogrammo AC siccome è doppio del triangolo DAB, così ancora è doppio del triangolo EAB (1). Sicchè se un parallelogrammo, ed un triangolo hanno la stessa base, e son racchiusi tra le medesime parallele, sarà il parallelogrammo doppio del triangolo.

AVVERTIMENTO.

I. Essendo le perpendicolari abbassate tra due parallele tutte uguali (2); è manifesto, che i triangoli, e i parallelogrammi racchiusi tra le medesime parallele hanno sempre uguali altezze (3).

II. Potendosi la retta DF prolungare all' infinito, potrà ancora all' infinito prolungarsi il parallelogrammo AF, e perciò il suo perimetro rendersi infinitamente maggiore del perimetro di AC, ancorchè la sua ampiezza, in virtù della data dimostrazione sia sempre uguale all' ampiezza del parallelogrammo AC. Dal che ne siegue, che dall' uguaglianza, o disuguaglianza delle ampiezze di due figure, non si può conchiudere l' uguaglianza, o disuguaglianza de' loro perimetri, nè dall' uguaglianza, o disuglianza de' perimetri conchiuder si può che sieno uguali le ampiezze. Sicchè molto s' ingannano coloro, i quali vogliono

---

(1) *Ass. 1.*
(2) *Corol. defin. 14.*
( ) *Def. 22.*

didecere dell' uguaglianza, o disuguaglianza di due campi, di due edificj, o città, dall'uguaglianza, o disuguaglianza de' loro perimetri; e così per lo contrario.

PROP. XXXIII. TEOR. XXII.

I Parallelogrammi, ed i triangoli, che hanno basi uguali, e sono racchiusi tra le medesime parallele, sono tra loro uguali.

Abbiano sì i parallelogrammi, BD, EG, (*Fig. 40.*) che i triangoli CAB, HEF le basi uguali AB, EF, e sieno racchiusi tra le medesime parallele DG, AF. Dico, che tanto i detti parallelogrammi, quanto i triangoli sono uguali fra loro.

Dim. Essendo ad AB uguale sì DC (1), che EF, saranno DC, EF uguali tra loro (2); ma sono di più parallele. Sicchè congiunte le rette DE, CF, anche queste saranno uguali, e parallele; e perciò la figura DEFC è un parallelogrammo (3); e poichè il parallelogrammo CE ha la medesima base DC col parallelogrammo DB, e sono amendue chiusi tra le medesime parallele DG, AF, sarà il parallelogrammo CE uguale al parallelogrammo DB; finalmente il suddetto parallelogrammo CE, ed il parallelogrammo GE avendo la stessa base EF, ed essendo racchiusi tra le medesime parallele, saranno tra loro uguali. Dunque essendo al terzo parallelogrammo CE uguale sì DB, che GE, saranno i parallelogrammi DB, GE, tra loro uguali (4), e per conseguenza uguali saranno

(1) *Prop. 29.*
(2) *Ass. 1.*
(3) *Def. 19.*
(4) *Ass. 1.*

ancora le loro metà, cioè i triangoli CAB, HEF. Sicchè i parallelogrammi, ed i triangoli ec. Ch'è quel tanto, che b. d.

COROLLARIO.

Il parallelogrammo DB è doppio del triangolo CAB; ma il triangolo CAB s'è dimostrato uguale al triangolo HEF. Dunque sarà il parallelogrammo DB doppio eziandio del triangolo HEF, e perciò se un parallelogrammo, ed un triangolo hanno uguali basi, e sono racchiusi tra le medesime parallele, sarà il parallelogrammo doppio del triangolo.

PROP. XXXIII. TEOR. XXIII.

I triangoli uguali, che hanno una stessa base, e sono situati dalla medesima parte, sono anche racchiusi tra le medesime parallele.

Sieno (*Fig.* 41.) ABC, ADC due triangoli uguali, che abbiano la stessa base AC, e sieno situati dalla medesima parte. Dico, che sono racchiusi tra le medesime parallele, cioè, che la retta BD è parallela ad AC.

Dim. Se si niega essere BD parallela con AC, si tiri, s'è possibile, dal punto B un'altra retta BF, che sia parallela con AC, e s'unisca FC. Avendo i triangoli ABC, AFC la stessa base AC, ed essendo racchiusi tra le medesime parallele AC, BF saranno tra loro uguali (1); ma per l'ipotesi i triangoli ABC, ADC, sono anche uguali. Dunque essendo al terzo

(1) *Prop.* 32.

triangolo ABC, uguale tanto AFC, quanto ADC, sarà il triangolo AFC uguale al triangolo ADC (1), cioè la parte uguale al tutto; ma ciò ripugna. Sicchè ripugna ancora, che BD non sia parallela ad AC. Ch'è ciò, che b. d.

PROP. XXXIV. TEOR. XXIV.

I triangoli uguali, che hanno le basi uguali posto a dirittura, e sono situati dalla medesima parte, sono anche racchiusi tra le medesime parallele.

Sieno (*Fig.* 42.) ABC, CDE due triangoli uguali, che abbiano le basi uguali AC, CE situate nella stessa retta AE, e sieno formati dalla medesima parte. Dico, che sono racchiusi tra le medesime parallele, cioè, che la retta BD è parallela con AE.

Dim. Se si niega esser BD parallela con AE, si tiri, s'è possibile, dal punto B un'altra retta BF, che sia parallela con AE, e s'unisca FE. Avendo i triangoli ABC, CFE uguali basi AC, CE, ed essendo racchiusi tra le medesime parallele BF, AE, sono tra loro uguali (2); ma per l'ipotesi il triangolo ABC è anche uguale al triangolo CDE. Sicchè sarà il triangolo CFE uguale al triangolo CDE (3); cioè la parte uguale al tutto; ma questo ripugna. Dunque ripugna ancora, che BD non sia parallela con AE. Ch'è ciò, che b. d.

---

(1) *Ass.* 1.
(2) *Prop.* 32.
(3) *Ass.* 1.

CAP. VII.

DELLA MANIERA DI TRASFORMARE IN PARALLELOGRAMMO QUALSIVOGLIA FIGURA RETTILINEA.

PROP. XXXV. PROB. XI.

Dato un triangolo, ed un' angolo rettilineo, formare un parallelogrammo uguale al dato triangolo, e che abbia un' angolo uguale al dato.

Ris. Sieno ABC (*Fig.* 43.) il dato triangolo, ed O l'angolo rettilineo dato. Si divida la base BC del triangolo ABC in due parti uguali in E (1), si faccia nella retta CE, e propriamente nel punto E l'angolo CEF uguale al dato (2); finalmente per gli punti C, ed A si tirino le rette CG, AG respettivamente parallele alle rette EF, BC; che si vadano ad incontrare nel punto G. Dico, che EG è il parallelogrammo ricercato.

Dim. Dal punto A, al punto E si tiri la retta AE. I triangoli BAE, EAC, hanno le basi uguali BE, EC, e sono racchiusi tra le medesime parallele. Dunque sono tra loro uguali (3); e perciò il triangolo BAC è doppio del solo triangolo EAC; ma il parallelogrammo EG è anche doppio del triangolo EAC (4). Laonde sarà il parallelogrammo EG uguale al triangolo BAC (5) ha di più il suddetto parallelo-

---

(1) *Prop.* 10.
(2) *Prop.* 8.
(3) *Prop.* 32.
(4) *Corol. prop.* 31.
(5) *As.* 6.

grammo l'angolo CEF uguale al dato O. Sicchè s'è formato il parallelogrammo EG uguale al triangolo BAC che ha l'angolo CEF uguale al dato O, è quel tanto che, b. f., e d.

AVVERTIMENTO.

Se per lo contrario dato il parallelogrammo EG, e l angolo O si volesse formare, un triangolo uguale al dato parallelogrammo EG, con un' angolo uguale al dato O; si farà in questo modo: si prolunghi la base CE sono a che CB sia doppia di CE, e formato in B l' angolo CBA uguale all' angolo O, e prolungata GF verso A, fino a tanto, che s' incontri con BA in A, si congiunga AC, sarà ABC il ricercato triangolo. Imperocchè del triangolo EAC essendone il doppio sì il triangolo BAC (1), che il parallelogrammo EG (2), sarà il triangolo BAC, che ha l' angolo in B uguale all' angolo O, uguale al parallelogrammo dato EG.

PROP. XXXVI. PROB. XII.

Dato un triangolo, un' angolo, ed una retta, formare un parallelogrammo uguale al dato triangolo, che abbia un' angolo uguale al dato, ed un lato uguale alla retta data.

Ris. Sieno (*Fig. 44.*) A il triangolo, B l'angolo e C la retta data. Si formi primieramente il parallelogrammo HF uguale al triangolo A, che abbia l'an-

---

(1) *Prop. 32.*
(2) *Coro. prop. 31.*

golo EHG uguale all'angolo B (1); di poi si prolunghi GH verso I fino a tanto che HI sia uguale a G; e tirata pel punto I la retta LK parallela ad HE, e GF, che s'unisca con FE prolungata in K, si congiunga KH, e si prolunghi in M finchè s'unisca con FH prolungata in M; finalmente tirata, pel punto M la retta ML parallela a GI, che s'unisca con KL in L, si prolunghi EH in N. Dico essere LH il parallelogrammo ricercato.

Dim. I parallelogrammi LH, HF sono tra loro uguali (2), ma HF per la costruzione è uguale al triangolo A. Dunque anche LH è uguale al triangolo A. Sono in oltre il lato HI uguale alla retta D, e l'angolo NHI, come uguale al suo verticale GHE, uguale conseguentemente al dato B. Sicchè s'è formato il parallelogrammo LH uguale al triangolo dato A, che ha l'angolo NHI uguale all'angolo B, ed il lato HI uguale alla retta C. Ch'è ciò, che b. f. e d.

---

(1) *Prop.* 35.
(2) *Prop.* 30.

Dato un rettilineo qualunque, ed un' angolo formare un parallelogrammo uguale al dato rettilineo, che abbia un' angolo uguale al dato.

Ris. Sia AC (*Fig.* 45.) il dato rettilineo, ed E il dato angolo. Si divida il rettilineo AC in quanti triangoli si può; onde essendo un quatrilatero, si dividerà con la retta BD ne' due triangoli BAD, BCD; e formato il parallelogrammo GI uguale al triangolo BAD, che abbia l'angolo in G uguale al dato E (1), si formi sulla retta IH l'altro parallelogrammo HK uguale al triangolo BCD, che abbia l'angolo IHL uguale all'angolo FGH (2). Dico, che GFHL è il parallelogrammo ricercato.

Dim. Essendo l'angolo IHL uguale all' angolo FCH aggiuntovi di comune l'angolo IHG, sarà la somma di IHL, IHG, uguale alla somma di FGH, IHG; ma questi come interni delle parallele FG, IH sono uguali a due retti (3). Dunque anche gli angoli IHL, IHG sono uguali a due retti; e perciò GH, HL formano una retta continuata (4); per la stessa ragione FI, IK formeranno una retta continuata; ma GH è parallela con FI. Sicchè tutta GL è parallela con tutta FK. In oltre essendo alla terza IH parallela sì FG, che KL sarà FG parallela con KL (5). Onde la figura GK è un parallelogrammo; ma il medesimo

(1) *Prop.* 25.
(2) *Prop.* 36.
(3) *Prop.* 19.
(4) *Prop.* 14.
(5) *Prop.* 20

per la costruzione è uguale al rettilineo ACI, ed ha l'angolo G uguale al dato E. Laonde s' è formato il parallelogrammo GK uguale al dato rettilineo, con un'angolo uguale al dato. Ch' è quel tanto, che b. f. e d.

AVVERTIMENTO.

Coll' ajuto di queste due ultime proposizioni è facile ritrovare di due rettilinei qualunque A, e B, sì la somma che la differenza. Imperocchè formato prima il parallelogrammo CE uguale al rettilineo A (1); si formi poscia su 'l lato ED l' altro parallelogrammo DH uguale al rettilineo B, che abbia l'angolo EDG uguale all' angolo C (2); e finalmente dalla base CD del parallelogrammo maggiore CE si tagli CM uguale a DG, e si tiri per M la retta MN parallela a CF. È chiaro, che il parallelogrammo CN è uguale a DH (3); e perciò ME dinota l' eccesso di CE sopra DH. Dunque de' due rettilinei A, e B, il parallelogrammo CH ne sarà la somma, ed ME la differenza.

---

(1) *Prop. 37.*
(2) *Prop. 36.*
(3) *Prop. 32.*

DELLA

GEOMETRIA PIANA

LIBRO SECONDO.

DEFINIZIONI

I.

Si dice *palmo*, *canna*, *piede*, *tesa*, *ec. lineare* una linea retta lunga un palmo, una canna, un piede, una tesa ec. Dicesi poi *palmo*, *canna*, *piede*, *ec. quadrato*, uno spazio quadrato, che ha ciascuno de' suoi lati d'un palmo, d' una canna, d' un piede ec.

II.

Un rettangolo si dice *formato da due lati*, *che contengano uno de' suoi angoli*; perchè d' essi uno dinoterà la sua altezza, e l' altro la larghezza.

AVVERTIMENTI.

I. Se nel rettangolo AC, (*Fig.* 47.) si concepisca il lato AD muoversi perpendicolarmente sull'altro lato AB, verrà con questo moto prodotto l' intero spazio AC, cioè l' ampiezza, del rettangolo; e perciò dicesi un rettangolo prodotto dalla moltiplicazione di due lati, che formano uno de' suoi angoli. Laonde se il lato AB fosse di 3 palmi, o piedi lineari, e DA di 2 sarebbe AC di 6 palmi, o piedi quadrati. Per vedere ciò sensibilmente, si dividano i lati AB, AD in parti tutte uguali AE, EF, FB,

CAP. I.

DELLA DOTTRINA DE' RETTANGOLI E QUADRATI.

PROP. I. TEOR. I.

Data una retta linea terminata, formare su di essa un quadrato.

Sia AB (*Fig. 48.*) la retta data. S'innalzi dal punto A la retta AC perpendicolare ad AB (1), e segata da essa la porzione AB uguale ad AB (2), si tirino per gli punti B, e D le rette BE, DE respettivamente parallele a DA, AB, che vadano ad unirsi in E. Dico, che ABED è il quadrato ricercato.

Dim. La figura ABHD per la costruzione è un parallelogrammo, il quale per avere il lato AD uguale al lato AB, è equilatero (3), e per avere l' angolo in A retto è rettangolo (4); laonde essendo equilatero, e rettangolo; è un quadrato (5). Dunque sopra la data retta AB s' è formato il quadrato AE. Ch' è quel tanto, che b. f., e d.

AVVERTIMENTO.

In una maniera quasi consimile si potrà, date due rette disuguali (*Fig. 49.*) AB, CD formare un rettangolo, che abbia per lunghezza AB, e per altezza CD. Imperocchè alzata dal punto A la retta AE

---

(1) *Prop. 11. lib. 1.*
(2) *Pro. 6. lib. 1.*
(3) *Cor. Pro. 29. lib. 1.*
(4) *Cor. 1. prop. 29. lib. 1.*
(5) *Def. 20.*

perpendicolare ad AB, e segatane la porzione AF uguale a CD (1); è chiaro, che se per gli punti F, e B si tireranno le rette FG, BG parallele respettivamente alle due AB, AF, che s' uniscano in G, sarà AG il rettangolo ricercato.

PROP. II. TEOR. II.

Se saranno date due rette, una divisa in parti, e l'altra indivisa, il rettangolo formato da tali rette è uguale alla somma di tutt' i rettangoli, che si fanno dall' indivisa nelle parti della divisa.

Sia, delle due date rette (*Fig. 50.*), AB divisa nelle parti AD, DE, EB, e C indivisa. Dico, che il rettangolo formato da AB e C è uguale a tutt' i rettangoli fatti dall' indivisa C nelle parti della divisa AD DE, EB.

Dim. Si formi dalle due rette AB, e C il rettangolo AI (2), e s' innalzino dai punti D, ed E le rette DG, EH perpendicolari ad AB. Essendo AG, DH, EI rettangoli, saranno AF, DG, EH tra loro uguali (3): ma AF è uguale a C; sicchè anche DG, ed EH sono uguali a C. Onde siccome il rettangolo AI e formato dai lati AB AF, e conseguentemente da AB e C, così ancora il rettangolo AG è formato da AD, AF, o vero AD e C, il rettangolo DH da DE, DG, o pure DE e C, e finalmente il rettangolo EI dalle rette EB, EH, ovvero EB, e C; ma il rettangolo AI è uguale ai rettangoli AG, DH,

---

(1) *Prop. 6. lib. 1.*
(2) *Avvertim. preced.*
(3) *Prop. 29. lib. 1.*

EI (1). Dunque il retangolo fatto da AB, e C uguale la somma de' rettangoli fatti da AD e C, DE e C, EB e C. Laonde se saranno date due rette ec. Ch'è quel tanto, che b. d.

AVVERTIMENTO.

Questo teorema, e gli altri 9 seguenti, che s'aggirano intorno la dottrina de' rettangoli, e quadrati possono rendersi più chiari coll' ajuto de' numeri nel seguente modo.

Sia AB di 12 palmi lineari divisa in più parti, delle quali AD sia di 5 palmi, DE di 4, EB di 3; e sia l' indivisa C di 6 palmi. Sarà il rettangolo di AB, e C di 72 palmi quadrati.

Il rettang. di AD e C è di 30
di DE e C è di 24 palmi quadr.
di EB e C è di 18

Somma 72 palmi quadr.

PROP. III. TEOR. III.

Se una retta è divisa in due parti comunque, il rettangolo fatto dall' intera retta; ed una delle sue parti è uguale al quadrato di questa medesima parte, una col rettangolo fatto dalle amendue parti.

Sia la retta AB (*Fig. 51.*) divisa nelle parti AC, CB. Dico che il rettangolo formato da tutta AB nella parte BC è uguale al quadrato della stessa parte BC, insieme col rettangolo fatto da AC e CB.

---

(1) *Ass. 8.*

Dim. Sopra CB si formi il quadrato CD, e per A si tiri AF parallela a CE, che s' unisca con DE prolungata in F (1). Essendo CD un quadrato saranno sì CE, che BD uguali a CB; onde il rettangolo AD, ch' è formato da AB e BD (2), sarà formato da AB e BC; similmente il rettangolo AE essendo formato da AC e CE, sarà formato da AC e CB; ma il rettangolo AD è uguale alla somma del quadrato CD, e del rettangolo AE. Dunque il rettangolo di AB e BC è uguale al quadrato di BC, una col rettangolo di AC e CB. Sicchè se una retta ec. Ch' è quel tanto, che b. d.

AVVERTIMENTO.

Sia AB di 10 palmi, AC di 4, e CB di 6. Sarà il rettangolo di AB e BC 60 palmi quadr.

Il quadrato di CB è di	36	
Il rett. di AC e CB di	24	pal. quad.
Somma	60	pal. quad.

PROP. IV. TEOR. IV.

Se una retta è divisa in due parti comunque, il quadrato dell' intera retta è uguale alla somma de' rettangoli fatti dall' intera retta, e da ciascuna delle sue parti.

Sia AB (*Fig.* 52.) la data retta divisa nelle parti AC, CB. Dico che il quadrato di AB è uguale a' rettangoli fatti uno da AB e AC, e l'altro da AB e BC

(1) *Prop.* 22. *lib.* 1.
(2) *Defin.* 2. *lib.* 2.

Dim. Sopra di AB si formi il quadrato AD (1), e per lo punto C si tiri CF parallela ai lati AE, BD. Essendo AD quadrato saranno AE BD uguali ad AB (2). Onde il rettangolo AF essendo formato da AE e AC, sarà formato da AB e AC, ed il rettangolo CD essendo formato da BD e BC sarà formato da AB e BC; ma il quadrato AD è uguale ai rettangoli AF, CD (3). Dunque il quadrato AD formato sull' intera AB è uguale ai rettangoli formato dall' intera AB nelle sue parti AC, e CB. Ch'è ciò che b. d.

AVVERTIMENTO.

Sia AB di 8 palmi, AC di 3 palmi e CB di 5. Sarà il quadrato di AB 64 palm. quadr.
Il rettang. di AB ed AC è di 24.
di AB e BC di 40. pal. qua.
Somma 64 pal. quad.

PROP. V. TEOR. V.

Se una retta è divisa in due parti comunque, il quadrato di tutta la retta, è uguale ai quadrati delle due parti, una col doppio rettangolo nelle medesime parti.

Sia la retta AB (*Fig.* 53.) divisa nelle parti AC, CB. Dico, che il quadrato di AB è uguale ai quadrati di AC, e CB, insieme col doppio rettangolo delle medesime parti AC, e CB.

Dim. Si formi su AB il quadrato AD, e tirata

(1) *Prop.* 1. *lib.* 2.
(2) *Def.* 20.
(3) *Ass.* 8.

Dim. Si formi su AB il quadrato AD, e tirata pel punto C, CF parallela a BD, che seghi la diagonale EB in O, si tiri per O la retta GH parallela a BA (1). Essendo nel triangolo EAB uguali i lati AE, AB, saranno per conseguenza anche gli angoli AEB, ABE fra loro uguali (2); ma per le parallele HG, AB segate dalla terza EB, l'angolo HGE è uguale all'angolo ABE (3). Dunque saranno gli angoli HEO, HOE tra loro uguali (4), e perciò uguali ancora i lati HE, HO (5). Onde la figura HF è equilatera (6), ma per l'angolo HEF retto, è anche rettangolo (7). Dunque è un quadrato (8) formato su HO, ovvero AC; col medesimo raziocinio si dimostra che CG è il quadrato formato su CB. In oltre i rettangoli AO, OD sono uguali (9); ma AO è formato da AC e CO, o sia da AC e CB. Sicchè i due rettangoli AO, OD sono uguali al doppio del rettangolo di AC e CB. Ciò posto, essendo il quadrato AD uguale ai quadrati HF, CG insieme coi rettangoli AO OD; sarà il quadrato AD fatto sull'intera retta AB uguale ai quadrati di AC, CB una col doppio rettangolo di AC e CB. Ch'è ciò, che b. d.

---

(1) *Prop*. 22. *lib*. 1.
(2) *Prop*. 25. *lib*. 1.
(3) *Prop*. 19. *lib*. 1.
(4) *Ass*. 1.
(5) *Prop*. 29. *lib*. 1.
(6) *Corol*. 1. *prop*. 29. *lib*. 1.
(7) *Corol*. 2. *prop*. 29. *lib*. 1.
(8) *Defin*. 20.
(9) *Prop*. 30. *lib*. 1.

AVVERTIMENTO.

Sia AB di 8 palmi, e CB di 5.

Sarà il quadrato di AB 64 palmi quad.
Il quadrato di AC è di 25
Il quadrato di CB 9
Il doppio rett. di AC e CB 30

Somma 64 palm. quad.

COROLLARII.

I. Essendosi dimostrato, che i parallelogrammi HF, CG sono quadrati, chiaramente si vede, che i parallelogrammi esistenti intorno la diagonale d'un quadrato sono anche quadrati.

II. Poichè AB dinota la somma delle due rette AC, CB; ed il quadrato di AB s'è dimostrato uguale ai quadrati di AC, e CB una col doppio rettangolo delle medesime AC, CB. È evidente, che il quadrato della somma di due rette è maggiore de' quadrati delle stesse rette pel doppio del rettangolo fatto dalle medesime rette.

PROP. VI. TEOR. VI.

Se una retta è divisa in due parti comunque; due quadrati, uno della tutta, e l'altro d'una delle sue parti sono uguale al doppio del rettangolo della tutta nella stessa parte, una col quadrato dell'altra parte.

Sia la retta AB (*Fig. 53.*) divisa nelle parti AC, e CB. Dico, che i quadrati della tutta AB, e della parte BC sono uguali al doppio del rettangolo di AB

nella stessa parte BC, insieme col quadrato dell' altra parte AC.

Dim. Si formi su AB il quadrato AD, e tirata la diagonale EB, e le rette CF, HG parallele respettivamente ai lati BD, BA, si formi su FD il quadrato FL, il quale, per essere FD uguale a CB, sarà uguale al quadrato CG. Essendo i complementi AO, OD uguali (1), aggiunti ed essi i quadrati uguali CG, FL, uguali saranno ancora i rettangoli AG, OL (2); ma AG è formato da AB e BG, e conseguentemente da AB e BC. Sicchè sarà la somma di AG, OL uguale al doppio del rettangolo di AB e BC; onde aggiuntovi di comune il quadrato HF, fatto su HO, ovvero AC, sarà la somma di AG, OL, e HF, cioè saranno i quadrati AD, FL formati su AB, e BC uguali al doppio del rettangolo di AB, BC una col quadrato di AC. Dunque se una retta è divisa ec. Ch' è quel tanto che b. d.

AVVERTIMENTO.

Sia AB di 10. palmi, e la parte AC di 7, sarà CB di 3.

		Il doppio rett.	
Il quadr. di AB è	100	di AB e BC è	60
di BC	9	Il quadr. di AC	49
Somma	109	Somma	109

---

(1) *Prop. 30. lib. 1.*
(2) *Ass. 2.*

COROLLARIO.

Se da AB si toglierà BC, sarà AC la differenza delle due rette disuguali AB, BC; ma il quadrato di AC, una col doppio rettangolo di AB e BC s'è dimostrato uguale ai quadrati di AB, BC. Dunque il solo quadrato della differenza AC è minore de' quadrati delle rette AB, BC pel doppio del rettangolo delle medesime rette.

PROP. VII. TEOR. VII.

Se una retta è divisa in due parti comunque, il quadrato formato sulla tutta, ed una parte unite insieme è uguale al quadruplo del rettangolo della tutta nella stessa parte, una col quadrato dell' altra parte.

Sia AB (*Fig. 54.*) divisa nelle due parti AC, CB, e si prolunghi verso D, in modo, che BD sia uguale a BC. Dico, che il quadrato di AD, ch' è composta dalla tutta AB, e dalla parte BC, è uguale al quadruplo del rettangolo di AB e BC, una col quadrato di AC.

Dim. Si formi su AD il quadrato DE, e tirata la diagonale FD, s' innalzino dai punti C, e B le rette CH, BG perpendicolari a DA, che intersechino FD ne' punti N, ed M, pe' quali si tirino IR, LQ parallele a DA. I rettangoli CI, PO, BL sono quadrati (1); onde essendo CB uguale BD sarà anche uguale a BM; e perciò il rettangolo CM, e conseguentemente ancora MI sono quadrati; e poichè le ret-

(1) *Coroll. 1. prop. 5. lib. 2.*

te CB, BD, PM, ML sono uguali, uguali saranno eziandio i quadrati CM, BL, PO, MI; sicchè insieme presi sono il quadruplo del solo CM. Di più CQ è uguale a PR, e GN a GI (1); ma PR uguaglia GN (2). Dunque tutti e quattro sono uguali, e perciò quadrupli del solo CQ. Laonde queste otto figure sono uguali al quadruplo del rettangolo AM, formato da AB e BM, o vero da AB e BC; ed aggiuntovi di comune il quadrato RH fatto su RN, o sia AC sarà tutto il quadrato AE fatto su AD uguale al quadruplo del rettangolo di AB e BC. una col quadrato di AC. Dunque se una retta ec. Ch' è quel tanto, che b. d.

AVVERTIMENTO.

Sia AB di 8 palmi, AC di 6, e CB di 2. Sarà AD di 10 palmi; e perciò il suo quadrato di 100 palmi quadr.

Il quadruplo del rettangolo di AB e BC è 16 preso 4 volte, cioè 64

Il quadrato di AC è 36

Somma 100 palmi quad.

COROLLARIO.

Se con AB, e BC si rappresentino due rette disuguali. È chiaro, che ad AB aggiunta la porzione BD uguale a BC, rappresenterà AD la loro somma, e tolta dalla stessa AB la minore BC, indicherà AC la loro differenza; ma nel precedente teorema s'è di-

(1) *Prop. 32. lib. 1.*
(2) *Prop. 30. lib. 1.*

mostrato, che il quadrato di AD è uguale al quadrato di AC una col quadruplo del rettangolo di AB e BC. Dunque il quadrato fatto sulla somma delle rette disuguali AB, BC è maggiore del quadrato della loro differenza AC pel quadruplo del rettangolo fatto delle medesime rette.

PROP. VIII. TEOR. VIII.

Se una retta è divisa in due parti uguali, e in due parti disuguali; il rettangolo delle parti disuguali, insieme col quadrato della porzione intermedia alle due divisioni, è uguale al quadrato della metà.

Sia AB (*Fig.* 55.) divisa in due parti uguali in C, e in due parti disuguali in D. Dico che il rettangolo di BD e DA, una col quadrato di CD, è uguale al quadrato di AD.

Dim. Si formi su AC il quadrato CF, e tirata la diagonale AE, e le rette DG, HI respettivamente parallele ai lati FA, AC, s'innalzi da B, BL perpendicolare a BA, che s'unisca con HI prolungata in L. Essendo FO uguale a CO (1), aggiuntovi di comune HD, sarà FD uguale a CH; ma eziandio CL è uguale a CH (2). Dunque sarà CL uguale a DF (3); onde aggiuntovi di comune CO, sarà il rettangolo BO formato da BD e DO, o vero da BD e DA uguale alla somma di CO, e DF, ed aggiuntovi finalmente di comune il quadrato IG formato su IO,

(1) *Prop.* 3o. *lib.* 1.
(2) *Prop.* 32. *lib.* 1.
(3) *Ass.* 1.

o sia CD; sarà il rettangolo di BD e DA, una col quadrato di CD uguale alla somma di CO, DF, e GI, cioè al quadrato della metà AC. Dunque se una retta ec. Ch'è ciò, che b. d.

AVVERTIMENTO.

Sia AB di palmi 10, sarà sì AC, che CB di 5; sia in oltre BD di 7 palmi, sarà DA di 3, e DC di 2. Il quadrato di AC è di 25 pal. quadr.

Il ret. di BD e DA è di 21
Il quadrato di DC di 4

Somma 25 pal. quad.

COROLLARIO.

Se con AC, e CD si rappresentano due rette disuguali, perchè CB è uguale a CA, aggiuntovi CD di comune, sarà BD uguale alla somma delle date AC, CD, e dalla maggiore AC tolta CD, sarà AD la loro differenza; ma il rettangolo di BD e DA s'è dimostrato uguale ai rettangoli CO, DF, cioè alla differenza del quadro CF sul quadrato IG, o sia del quadrato di AC sul quadrato di CD. Dunque il rettangolo fatto dalla somma, e della differenza di due rette disuguali è uguale alla differenza de' quadrati fatti sulle medesime rette.

PROP. IX. TEOR. IX.

Se una retta è divisa in due parti uguali, e ad essa se n'aggiugne un'altra a dirittura; il rettangolo fatto dalla tutta, e dall'aggiunta come una sola retta, nella stessa aggiunta, insieme col quadrato della metà è uguale al quadrato della metà, e dell'aggiunta unite insieme.

SIa AB (*Fig.* 56.) divisa in due parti uguali in C e ad essa aggiungasi a dirittura AD. Dico, che il rettangolo di BD e DA, una col quadrato di AC è uguale al quadrato di DC.

Dim. Si formi su DC il quadrato CF (1), e tirata la diagonale DE, e le rette AI, GH parallele respettivamente ai lati FD, DC, s'alzi dal punto B, BL perpendicolare a DB, che s'unisca con GH prolungata in L. I rettangoli BH, CO (2) sono tra loro uguali; ma CO è uguale ad OF (3). Dunque anche BH è uguale ad OF; onde aggiuntovi di comune CG, sarà il rettangolo BC, formato da BD e DG, ovvero BD e DA uguale alla somma di CG, e GI; perciò aggiuntovi eziandio di comune il quadrato IH formato su OH, o sia AC; sarà il rettangolo di BD e DA, una col quadrato di AC uguale alla somma di CG, GI, e IH cioè al quadrato CF formato sulla metà DC. Sicchè se una retta è divisa ec. Ch'è quel tanto, che b. d.

---

(1) *Prop.* 1. *lib* 2.
(2) *Prop.* 32. *lib.* 1.
(3) *Prop.* 30. *lib.* 1.

AVVERTIMENTO.

Sia AB di 8 palmi, sarà tanto AC, quanto CB di 4 palmi; sia di più AD di palmi 2; onde sarà BD di 10 palmi, e BC di 6.

Il quadr. di DC è di 36 palmi quadr.
Il rett. di BD, e DA è di 20
Il quadrato di AC è di 16

Somma 36 pal. quad.

PROP. X. TEOR. X.

Se una retta è divisa in due parti uguali, e in due parti disuguali, i quadrati delle parti disuguali sono il doppio de' quadrati fatti, uno sulla metà, e l'altro sulla parte intermedia alle due divisioni.

Sia la retta AB (*Fig.* 57.) divisa in due parti uguali in C, e in due parti disuguali in D. Dico che i quadrati di BD, e DA sono il doppio de' quadrati di AC, e CD.

Dim. Essendo BC uguale a CA, aggiuntovi di comune CD, sarà BD uguale alla somma delle due rette disuguali AC, CD, e tolta da AC la minore CD, sarà AD la loro differenza. Onde il quadrato della somma BD è uguale ai quadrati delle rette AC, CD, insieme col doppio del rettangolo di AC e CD (1); ed il quadrato della differenza AD è uguale ai quadrati delle medesime AC, CD, toltone il doppio loro rettangolo (2). Sicchè se coll'eccesso de' primi si com-

(1) *Corol.* 2. *prop.* 5. *lib.* 2.
(2) *Cor. prop.* 6. *lib.* 2.

pensa il difetto de' secondi, sarà la somma de' quadrati fatti sulle parti disuguali BD, DA uguale ai quadrati di AC, e CD presi due volte, cioè uguale al doppio de' quadrati di AC, metà della retta, e CD parte intermedia. Ch' è ciò che b. d.

COROLLARIO.

I quadrati di BD, e DA sono, come s' è dimostrato, il doppio de' quadrati di AC, e CD; ma di queste rette AC e CD, BD ne dinota la somma, e DA la differenza. Sicchè i quadrati della somma, e della differenza di due rette disuguali sono il doppio de' quadrati fatti sulle medesime rette.

PROP. XI. PROB. XI.

Se una retta è divisa in due parti uguali, e ad essa se n' aggiugne un' altra a dirittura; due quadrati uno dell' intera e dell' aggiunta, come una sola retta, e l' altro dell' aggiunta sono il doppio de' quadrati fatti uno sulla metà, e l' altro sulla metà e l' aggiunta unite insieme.

Sia la retta AB (*Fig.* 58.) divisa in due parti uguali in C, e ad essa s' aggiunga a dirittura AD. Dico, che i quadrati di BD, e DA sono uguali al doppio de' quadrati di CA, e CD.

Dim. Essendo CB uguale a CA, aggiuntovi di comune DC, sarà BD uguale alla somma delle due rette disuguali DC e CA; e tolta dalla maggiore DC la minore CA, sarà DA la differenza delle medesime rette. Il quadrato della somma DB è uguale ai quadrati di DC, e CA, una col doppio del rettangolo

delle medesime DC e CA (1), ed il quadrato della differenza AD è uguale ai quadrati di DC, e CA diminuiti però del doppio del rettangolo delle suddette rette (2). Sicchè se coll' eccesso de' primi si compensa il difetto de' secondi; sarà la somma de' quadrati fatti su DB, e DA uguali ai quadrati di DC, e CA due volte presi, cioè uguale al doppio de' quadrati fatti uno sulla metà AC, e l'altro su DC, è ciò, che b. d.

CAP. II.

DE' QUADRATI FATTI SUI LATI DE' TRIANGOLI, E DEL LORO RAPPORTO.

PROP. XII. PROB. XII.

In ogni triangolo rettangolo il quadrato dell' ipotenusa è uguale alla somma de' quadrati fatti su gli cateti.

Sia il triangolo ABC (*Fig. 59.*) rettangolo in A. Dico che il quadrato dell' ipotenusa BC è uguale alla somma dei quadrati fatti su i cateti CA, AB.

Dim. Si formino su questi tre lati i quadrati CE, CG, BL (3), e tirata per A la retta AI parallela a CD (4), s' uniscano le rette AD, BF. Poichè retto è, sì l'angolo CAB, che l'angolo CAG, sarà la somma di CAG, CAB uguale a due retti, e perciò BA, AG formano una retta continuata (5). Onde non solo AG,

(1) *Cor. 2. prop. 5. lib. 2.*
(2) *Cor. prop. 6. lib. 2.*
(3) *Prop. 1. lib. 2.*
(4) *Prop. 22. lib. 1.*
(5) *Prop. 14. lib. 1.*

ma tutta BG è parallela a CF. Similmente si dimostra essere tutta LC parallela a BH. In oltre essendo per gli quadrati CG, CE, sì AC uguale a CF, che CB uguale a CD; saranno i due lati FC, CB del triangolo FCB uguali respettivamente ai due lati AC, CD del triangolo ACD; essendo di più gli angoli FCA, DCB uguali perchè retti, aggiuntovi di comune l' angolo ACB, sarà eziandio l'angolo FCB uguale all'angolo ACD (1). Sicchè i triangoli FCB, ACD sono tra loro uguali (2); ma il quadrato CG è il doppio del triangolo FCB, e il rettangolo CI è il doppio del triangolo ACD (3). Dunque sarà anche il quadrato CG uguale al rettangolo CI (4). Dello stesso modo si dimostra, che il Rettangolo BI è uguale al quadrato BC. Per la qual cosa la somma de' rettangoli CI, IB, cioè il quadrato CE fatto sull' ipotenusa BC è uguale alla somma de' quadrati CG, BL fatti su i cateti CA, AB. Ch'è ciò, che b. d.

COROLLARII.

I. Il quadrato CG s'è dimostrato uguale al rettangolo CI formato da CD e CM; ma pel quadrato CE, CD è uguale a CB. Dunque il quadrato CG è uguale al rettangolo di BC e CM; per la medesima ragione il quadrato BL è uguale al rettangolo di CB e BM. Sicchè se nel triangolo rettangolo s'abbassa dall' angolo retto una perpendicolare all' ipotenusa, sarà il quadrato di ciascun lato uguale al rettangolo fatto dall' intera ipotenusa nella porzione contigua a detto lato.

---

(1) *Ass.* 2.
(2) *Prop.* 2. *lib.* 1.
(3) *Corol. prop.* 31. *lib.* 1.
(4) *Ass.* 6.

II. Pel triangolo AMC rettangolo in M, il quadrato di AC è uguale ai quadrati di AM, MC; ma lo stesso quadrato di AC è anche uguale al rettangolo di BC e CM (1) e conseguentemente al rettangolo di BM ed MC, una col quadrato di MC (2). Dunque i quadrati di AM, e MC sono uguali al rettangolo di BM e MC, insieme col quadrato di MC, onde, toltone il comune quadrato di MC, rimarrà il quadrato di AM uguale al rettangolo di BM e MC. Sicchè se nel triangolo rettangolo s'abbassa dall'angolo retto una perpendicolare all'ipotenusa, il quadrato di questa perpendicolare è uguale al rettangolo fatto delle porzioni dell' ipotenusa divisa.

III. Si formi coll'ipotenusa BC (*Fig.* 60.) e colla perpendicolare AM il rettangolo BE, e coi cateti AB, AC l'altro AD; il rettangolo BE è il doppio del triangolo BAC, avendo ambidue la stessa base BC, ed essendo racchiusi tra le medesime parallele (3); ma il rettangolo AD anch'è il doppio del triangolo BAC (4). Dunque il rettangolo BE formato dall'ipotenusa BC, e dalla perpendicolare AM è uguale al rettangolo AD formato dai cateti AB, AC.

AVVERTIMENTI.

I. Questo sublime teorema, ch'è di un uso immenso in tutta la Matematica, inventato fù, come riferiscono Proclo, Vitruvio, e altri, dal famoso Pitagora, il quale offerì in ringraziamento alle Muse un *Ecatombe*, cioè un sacrifizio di 100 vittime,

(1) *Cor. preced.*
(2) *Prop. 3. lib. 1.*
(3) *Cor. prop. 31. lib. 1.*
(4) *Prop. 29. lib. 1.*

credendosi dalle medesime ajutato in una sì grande scoverta.

II. S' è nelle definizioni di questo libro osservato, che per determinare l' ampiezza del triangolo è necessario sapere la sua altezza, la quale può dedursi da suoi lati stessi qualora sono dati; anzi nel triangolo rettangolo basteranno due lati soltanto, perchè da questi si può facilmente venire in cognizione del terzo: in fatti se saranno dati i lati AB, AC, si determinerà facilmente l' ipotenusa BC, (*Fig.* 80.) facendo i quadrati de' detti lati AB, AC, ed estraendo dalla loro somma la radice quadrata, se poi coll' ipotenusa BC fosse dato uno de' lati, per esempio BA, si determinerà l' altro lato AC, sottraendo dal quadrato di BC il quadrato di BA, ed estraendo dal residuo la radice quadrata.

Determinati così tutt' i lati, è facile ancora determinare la perpendicolare AM abbassata sull' ipotenusa, imperocchè essendo il quadrato di AB uguale al rettangolo di CB e BM, ed il quadrato di AC uguale al rettangolo di BC, e CM (1); se si divideranno per CB, sì il quadrato di AB, che il quadrato di AC il quoziente di queste divisioni saranno le porzioni BM, MC; ma il quadrato della perpendicolare AM è uguale al rettangolo di BM e MC (2). Dunque se dal rettangolo di BM ed MC si caverà la radice quadrata, questa sarà il valore della perpendicolare AM. Finalmente essendosi dimostrato, che il rettangolo di BA, ed AC è uguale al rettangolo di AM e BC (3); è chiaro, che si dividerà il rettangolo di BA ed AC per l' ipotenusa BC il quoziente sarà ancora la perpendicolare AM.

---

(1) *Corol.* 1. *preced.* (2) *Corol.* 2. *preced.*
(3) *Corol.* 3. *preced.*

PROP. XIII. TEOR. XIII.

In ogni triangolo ottusangolo il quadrato del lato opposto all' angolo ottuso è maggiore de' quadrati degli altri due lati del doppio del rettangolo formato da uno di questi lati, e dalla porzione che l' aggiugne la perpendicolare calata dall' angolo opposto.

Sia ABC (*Fig. 61.*) un triangolo ottusangolo in B, nel quale s' abbassi sul lato CB prolungato in D la perpendicolare AD. Dico, che il quadrato di AC è maggiore de' quadrati di AB, BC del doppio del rettangolo formato dal lato CB, e dalla porzione BD, ed esso lato aggiunta dalla perpendicolare AD.

Dim. Essendo la retta CD divisa comunque in C, sarà il suo quadrato uguale ai quadrati delle parti CB, BD, una col doppio del rettangolo delle medesime AC, BD (1); e perciò aggiuntovi di comune il quadrato di DA, saranno i quadrati di CD, e DA uguali ai quadrati di CB, BD, e DA, una col doppio del rettangolo di CB e BD, ma per gli due triangoli rettangoli CDA, BDA li quadrati di CD, e DA sono uguali al quadrato di CA, ed i quadrati di BD, e DA sono uguali al quadrato di AB. Dunque sarà il quadrato di CA uguale ai quadrati di CB, e BA, insieme col doppio del rettangolo di CB e BD, e perciò maggiore de' quadrati di CB, e BA pel doppio del suddetto rettangolo di CB e BD. Ch' è quel tanto, che b. d.

---

(1) *Pro. 5. lib. 1.*

AVVERTIMENTO.

Per determinare nel triangolo ottusangolo ABC la perpendicolare AD, bisogna primieramente dal quadrato di AC togliere i quadrati di AB e BC, e determinarle l'avanzo; e poichè il quadrato di AC è maggiore de' quadrati di AB, e BC pel doppio del rettangolo di CB e BD; perciò un tale avanzo sarà il doppio del rettangolo di CB e BD, il quale diviso pel doppio del lato CB, darà in quoziente la porzione BD. Ciò fatto, se nel triangolo rettangolo ABD dal quadrato di AB si toglierà il quadrato di BD, rimarrà il quadrato di AD, la cui radice sarà il valore della perpendicolare AD.

PROP. XIV. TEOR. XIV.

In ogni triangolo il quadrato fatto sul lato opposto ad un' angolo acuto è minore de' quadrati degli altri due lati del doppio del rettangolo formato da uno di questi lati, e dalla porzione adjacente all' angolo acuto, che ne taglia la perpendicolare calata dall' angolo opposto.

Sia nel triangolo ABC (*Fig*. 62.) l'angolo in B acuto, e s'abbassi su 'l lato BC dall' angolo opposto A la perpendicolare AD. Dico, che il quadrato di AC è minore de' quadrati di CB, e BA del doppio del rettangolo formato del lato CB, e dalla porzione BD, da esso lato tagliata dalla perpendicolare AD.

Dim. Essendo la retta CB divisa comunque in D, sarà il quadrato di CD, insieme col doppio del rettangolo di CB e BD uguale ai quadrati delle me-

desime rette CB, BD (1); e perciò aggiuntovi di comune il quadrato di AD, saranno i quadrati di CD, e DA, una col doppio del rettangolo di CB e BD uguali ai quadrati di CB, BD, e DA; ma per gli triangoli CAD, BAD rettangoli in D, i quadrati di CD, e DA sono uguali al quadrato di CA, ed i quadrati di BD, e DA sono uguali al quadrato di AB (2). Sicchè sarà il quadrato di AC, una col doppio del rettangolo di CB e BD uguale ai quadrati di CB, e BA. Dunque il solo quadrato di AC è minore de' quadrati di CB, e BA pel doppio del rettangolo di CB e BD. Ch' è ciò, che b. d.

AVVERTIMENTI.

I. Se nel triangolo ABC si vuol determinare la perpendicolare AD, si deve primieramente dalla somma de' quadrati di AB, e BC togliere il quadrato di AC, e notare il residuo; e poichè il quadrato di AC è minore de' quadrati di AB, e BC del doppio del rettangolo di CB e BD (3); perciò un tale residuo sarà uguale al doppio del rettangolo di CB e BD onde diviso per lo doppio del lato CB; darà per quoziente la porzione BD. Ciò fatto, se nel triangolo rettangolo ABD dal quadrato di AB si toglierà il quadrato di questa porzione BD, il residuo sarà il quadrato di AD, e conseguentemente la sua radice quadrata sarà la perpendicolare AD.

II. Dividendo le diagonali sempre il parallelogrammo in due triangoli uguali, saranno i quadrati delle due diagonali sempre uguali ai quadrati fatti su

---

(1) *Prop. 6. lib. 2.*
(2) *Prop. 12. lib. 2.*
(3) *Prop. prec.*

i quattro lati. Questa verità è chiara da se medesima, se il parallelogrammo è rettangolo; se poi è obliquangolo come ABCD, (*Fig. 63.*) si potrà dimostrare nel seguente modo; s' abbassino sulli lati CB, DA le respettive perpendicolari AE, BF; saranno AF, EB uguali fra loro (1); e perciò il rettangolo di CB e BE sarà uguale al rettangolo di DA a AF. Il quadrato di AC, pel triangolo ABC ottusangolo in B, è uguale ai quadrati di AB, BC, ovvero di DC, CB, insieme col doppio del rettangolo di CB e BE (2); ed il quadrato di BD, pel triangolo BAD acutangolo in A, è uguale ai quadrati di BA, AD, diminuiti del doppio del rettangolo di DA ed AF (3). Dunque se coll' eccesso de' primi si compenserà il difetto de' secondi, saranno i quadrati delle due diagonali AC, DB, insieme presi uguali alla somma de' quadrati di tutti e quattro i lati.

---

(1) *Coro. prop. 17. lib. 1.*
(2) *Prop. 13. lib. 2.*
(3) *Pro. prec.*

PROP. XV. TEOR. XV.

L' angolo formato da due lati d' un triangolo sarà retto, ottuso, o acuto secondochè il quadrato fatto sul lato opposto a detto angolo è uguale, maggiore, o minore de' quadrati fatti su gli altri due lati.

RAppresenti BAC (*Fig. 64.*) qualunque triangolo Dico I., che l' angolo BAC è retto, se il quadrato di BC è uguale ai quadrati di BA, AC; II., che il medesimo angolo BAC è ottuso, se il quadrato di BC è maggiore di quei di BA, AC; III. finalmente, ch' è acuto, se il quadrato di BC è minore de' quadrati di BA, AC.

Dim. I. Sia il quadrato di BC uguale ai quadrati di BA, AC. S' innalzi da A, AD perpendicolare ad AC, è uguale a BA, e s' unisca CD. Essendo BA, AD uguali, saranno i loro quadrati anche uguali, onde aggiuntovi di comune il quadrato di AC, saranno i quadrati di BA, AC uguali ai quadrati di DA, AC; ma il quadrato di BC, è uguale ai quadrati di BA, AC, ed il quadrato di DC è uguale ai quadrati di DA, AC (1). Dunque il quadrato di BC è uguale al quadrato di CD, e per conseguenza la retta BC è uguale a CD. Sicchè ne' triangoli BAC, CAD essendo il lato BA uguale a DA, il lato AC comune, e la base BC uguale alla base CD, sarà l' angolo BAC uguale all' angolo DAC (2), e perciò retto.

II. Sia il quadrato di BC maggiore de' quadrati

---

(1) *Prop. 12. lib. 2.*
(2) *Prop. 1. lib. 1.*

di BA, AC; sarà anche maggiore de' quadrati di DA, AC, e conseguentemente del quadrato di DC. Onde BC base del triangolo BAC è anche maggiore di CD base del triangolo DAC; e perciò l'angolo BAC è maggiore del retto DAC, e conseguentemente è ottuso.

III. Sia il quadrato di BC minore de' quadrati di BA, AC; sarà ancora minore de' quadrati di DA, AC, e perciò anche (1) del quadrato di DC. Dunque sarà la base BC minore della base CD (2). Onde l'angolo BAC è minore del retto CAD, e per conseguenza è acuto. Sicchè ec. Ch'è ciò, che b. d.

CAP. III.

DELLA RISOLUZIONE DE' PRINCIPALI PROBLEMI ATTENENTI ALLA DOTTRINA DE' RETTANGOLI E QUADRATI.

PROP. XVI. PROB. I.

Data una retta dividerla talmente in un punto, che il rettangolo di tutta la retta, ed una parte sia uguale al quadrato dell' altra parte.

Ris. Sia AB (*Fig.* 65.) la retta data; su della quale si formi il quadrato AD (3); di poi diviso il lato AE in due parti uguali in F (4), e congiunta FB, si prolunghi FA in G in modo, che FG sia uguale ad FB; finalmente fatto su AG il quadrato AH, si prolunghi HA in I. Dico che AB s'è divisa talmente

(1) *Cor. prop.* 2. *lib.* 1.
(2) *Assio. primo.*
(3) *Prop.* 1. *lib.* 2.
(4) *Prop.* 10. *lib.* 1.

in C, che il rettangolo di AB, e BC è uguale al quadrato di AC.

Dim. La retta AE è divisa in due parti uguali in F, e ad essa s' è aggiunta l' altra AG. Sicchè il rettangolo di EG e GA, insieme col quadrato di AF è uguale al quadrato di FG (1), o vero FB, e conseguentemente ai due quadrati di AF, AB, pel triangolo FAB rettangolo in A; onde toltone il comune quadrato di AF, sarà il rettangolo di EG e GA, o sia EG e GH, cioè il rettangolo EH uguale al quadrato di AB, ch' è appunto AD; e tolto da questi il rettangolo AI anche comune, rimarrà il quadrato AH uguale al rettangolo CD formato da BD e BC; ma BD è uguale a BA (2). Dunque sarà il quadrato AH fatto sulla parte AC uguale al rettangolo di tutta AB, e dell' altra parte BC. Ch' è quel tanto che b. f. e d.

PROP. XVII. PROB. II.

Dato una retta prolungarla in modo, che il rettangolo formato da tutta la retta prolungata, e dalla parte aggiunta sia uguale al quadrato della stessa retta data.

Ris. Sia CD (*Fig.* 65.) la retta data: questa si divida talmente in A, che il rettangolo di CD e DA sia uguale al quadrato di AC (3), e si prolunghi di poi in B, finchè sia CB uguale a CA. Dico, che la retta DC s' è talmente prolungata in B, che il rettangolo di DB e BC è uguale al quadrato di CD.

Dim. Il rettangolo di DB e BC è uguale al ret-

(1) *Prop.* 9. *lib.* 2.
(2) *Defin.* 29.
(3) *Prop. preced.*

tangolo delle parti DC e CB, una col quadrato di CB (1); e per essere CB uguale a CA, sarà uguale al rettangolo di DC e CA, insieme col quadrato di CA; ma per la costruzione il quadrato di CA è uguale al rettangolo di CD, e DA. Dunque il rettangolo di DB e BC è uguale ai due rettangoli di DC, CA, e di DC e DA, conseguentemente al quadrato di DC (2). Ch'è ciò, che b. d.

PROP. XVIII. PROB. III.

Dati più quadrati, formarne uno, che sia uguale alla loro somma.

Ris. SIeno AB, CD, EF (*Fig.* 66.) i lati de' quadrati dati. S'innalzi dal punto B su AB la perpendicolare BG, che sia uguale a CD (3); e congiunta AG, s'alzi da G, GH perpendicolare a GA, ed uguale ad EF, e s'unisca AH. Dico, che AH, è il lato del quadrato ricercato, cioè uguale ai quadrati di AB, CD, EF.

Dim. Essendo il triangolo AGH rettangolo in G, sarà il quadrato di AH uguale ai quadrati di AG, e GH (4); ma pel triangolo ABG rettangolo in B, il quadrato di AG è uguale ai quadrati di AB, e BG. Sicchè il quadrato di AH è uguale ai quadrati di AB, BG, e GH. Laonde essendo per la costruzione BG uguale a CD, e GH ad EF; sarà il suddetto quadrato di AH uguale ai quadrati di AB, CD, EF. Ch'è quel tanto, che b. d.

---

(1) *Prop. 3. lib. 2.*
(2) *Prop. 4. lib. 2.*
(3) *Prop. 11. lib. 1.*
(4) *Prop. 12. lib. 2.*

PROP. XIX. PROB. IV.

Dati due quadrati disuguali, formarne un terzo, che sia uguale alla loro differenza.

Ris. SIeno AB (*Fig. 67.*) il lato del quadrato maggiore, e BC del minore. Si dispongano AB, BC in modo, che formino una retta continuata; indi alzata da C CD, che sia penpendicolare a CA (1), si descriva col centro B, ed intervallo BA l'arco circolare AE, che intersechi CD in E. Dico, essere CE il lato del quadrato ricercato.

Dim. Essendo, congiunta EB, il triangolo ECB rettangolo in C, saranno i quadrati di EC, CB uguali al quadrato di EB (2); onde toltone di comune il quadrato di CB, sarà il quadrato di CE uguale alla differenza de' quadrati di EB, e BC, e conseguentemente di AB, e BC. Ch' è ciò, che b. d.

PROP. XX. PROB. V.

Dato un rettilineo qualunque, formare un quadrato, che li sia uguale.

Ris. SIa A (*Fig. 68.*) il rettilineo dato. Si formi il parallelogrammo BD uguale al rettilineo A, che abbia l'angolo BCD retto (3); se BC è uguale a CD, sarà BD equilatero, e rettangolo, e perciò sarà il quadrato ricercato (4); ma se BC non è uguale a

(1) *Prop. 11. lib. 1.*
(2) *Prop. 12. lib. 2.*
(3) *Prop. 37. lib. 1.*
(4) *Def. 20.*

CD, si prolunghi in tal caso BC in E, finchè sia CE uguale a CD, e descritto su BE il semicerchio BGE si prolunghi DC in G. Dico, che CG è il lato del quadrato ricercato.

Dim. Dal centro F al punto G si tiri la retta FG. Essendo BE divisa in due parti uguali in F, e in due parti disuguali in C; sarà il rettangolo di BC, e CE, una col quadrato di CF, uguale al quadrato di EF (1), o vero FG; ma pel triangolo FCG rettangolo in C, il quadrato di FG è uguale ai quadrati di FC, e CG (2). Dunque il rettangolo di BC e CE, o sia di BC e CD, cioè il rettangolo BD, insieme col quadrato di CF, è uguale ai due quadrati di CF, e CG; onde toltone il comune quadrato di CE, sarà il rettangolo BD, e conseguentemente il rettilineo A uguale al quadrato di CG. Ch' è quel tanto, che b. d.

(1) *Prop. 8. lib. 2.*
(2) *Prop. 12. lib. 2.*

DELLA

GEOMETRIA PIANA

LIBRO TERZO.

DEFINIZIONI.

I.

DIconsi *Cerchi uguali*, quelli, che hanno raggi, o diametri uguali.

II.

Una retta si dice *Tangente* del cerchio, se talmente incontra la periferia in un punto, che prolungata cade tutta fuori del cerchio. Il punto dell' incontro si chiama *punto del contatto.*

III.

Si dicono due cerchi *toccarsi*, se colle loro periferie s' incontrano in modo, che l' una non intersechi l' altra.

IV.

Due rette si diranno *egualmente distanti dal centro*, se le perpendicolari abbassato dal centro sulle medesime sono uguali; ma se la perpendicolare abbassata su una di esse sarà maggiore della perpendicolare abbassata sull' altra; si dirà quella *più distante* di questa *dal centro.*

V.

Angolo al centro è quello, che ha il vertice nel centro del cerchio; *angolo* poi *alla periferia* è quello, che ha il vertice nella periferia.

VI.

Angolo nella porzione dicesi quello, il cui vertice è nella porzione, e i lati passano per gli estremi della medesima porzione.

VII.

Porzioni simili di cerchi si dicono quelle, che contengono angoli eguali.

C A P. I.

DELLE PROPRIETA' DEL CERCHIO RELATIVAMENTE AL SUO CENTRO, E DEL MODO DI RITROVARLO.

PROP. I. PROB. I.

Se dentro d' un cerchio si tirano due rette in modo, che la prima seghi la seconda in due parti uguali, e ad angoli retti; passerà la prima pel centro; cioè sarà diametro del dato cerchio.

Dentro del cerchio CAD (*Fig. 69.*) si tirino le due rette AB, CD, delle quali AB divida CD in due parti uguali, e ad angoli retti. Dico, che in AB è il centro.

Dim. Sia, s'è possibile, il centro fuori di AB nel punto F. Poichè, congiunte le rette CF, OF, FD, ne' triangoli CFO, DFO il lato CO è uguale al lato OD, il lato OF è comune, e la base CF è uguale alla base FD, come supposti raggi del medesimo cerchio; saranno gli angoli FOC, FOD uguali (1), e conseguentemente retti; ma l'angolo AOC per l'ipotesi eziandio è retto. Sicchè sarà l'angolo AOC

(1) *Prop. 1. lib. 2.*

uguale all' angolo FOC (1), cioè la parte uguale al tutto ; ma ciò ripugna. Dunque ripugna ancora, che il centro sia fuori della retta AB. Ch' è ciò, che b.d.

PROP. II. TEOR. II.

Se una retta, che passa pel centro d' un cerchio divide un' altra, che non passa pel centro in due parti uguali, la dividerà ancora ad angoli retti; e se la divide ad angoli retti, la dividerà anche in due parti uguali.

Passi la retta AB (*Fig.* 70.) per lo centro E del cerchio ACBD. Dico I., che se AB divide CD in due parti uguali in F, la dividerà ancora ad angoli retti; II., che se la divide ad angoli retti, la dividerà anche in due parti uguali.

Dim. I. Essendo, tirati i raggi EC, ED, nei triangoli ECF, EDF il lato CF uguale al lato FD per l' ipotesi, il lato EF comune, e la base EC uguale alla base ED (2); saranno gli angoli EFC, BFD, uguali (3), e conseguentemente retti. Dunque AB ha diviso CD ad angoli retti.

II. Ne' triangoli ECF, EDF, l'angolo ECF è uguale all' angolo EDF, come angoli alla base del triangolo isoscele CED; l' angolo EFC, è uguale all' angolo EFD, perchè son retti; di più il lato EF è comune. Dunque sarà ancora il lato CF uguale al lato FD (4). Sicchè AB ha diviso CD in due parti uguali in F. Ch' è ciò, che b. d.

---

(1) *Ass.* 12.
(2) *Def.* 23. *lib.* 1.
(3) *Prop.* 1. *lib.* 1.
(4) *Prop.* 3. *lib.* 1.

PROP. III. TEOR. III.

Se dentro d' un cerchio due rette s' intersecano in un punto diverso dal centro, non possono amendue segarsi in parti uguali.

Dentro del cerchio GDB (*Fig.* 71.) s' intersechino le due rette AB, CD nel punto E differente dal centro F. Dico che non possono amendue segarsi in parti uguali.

Dim. Si seghino, s' è possibile, amendue in parti uguali nel punto E, e si congiunga EF, la quale si prolunghi in G, ed H. Poichè GH passa per lo centro F, e sega tanto AB, quanto CD in due parti uguali in E, le segherà ancora ad angoli retti (1); e perciò retto sarà, sì l' angolo GEA, che l' angolo GED, ma tutt' i retti sono uguali (2). Dunque sarà l' angolo GEA uguale all' angolo GED; cioè la parte uguale al tutto; il che ripugna ancora, che le rette AB, e CD si sieno amendue segate in parti uguali. Ch' è quel tanto, che b. d.

PROP. IV. TEOR. IV.

Se da un punto preso dentro d' un cerchio si tirano alla circonferenza più di due rette uguali un tale punto è il centro.

Dal punto O, (*Fig.* 72.) preso dentro del cerchio ACBD si tirino alla periferia le tre rette uguali OE, OF, OG. Dico, che O è il centro di questo cerchio.

---

(1) *Prop. preced.*
(2) *Ass.* 12.

Dim. S' uniscano i tre punti E, F, G mediante le rette, EF; FG, le quali divise in due parti uguali in I, e H (1); si tiri, sì per gli punti I, ed O la retta AB, che per H, ed O la retta CD. Essendo ne' triangoli EIO, FIO il lato EI uguale al lato FI il lato IO comune, e la base OE uguale alla base OF, saranno gli angoli OIE, OIF uguali, e per conseguenza retti. Sicchè la retta AB avendo diviso EF in due parti uguali, e ad angoli retti, in essa è il centro (2).

Similmente si dimostra essere il centro anche in CD. Dunque essendo il centro tanto in AB, quanto in CD, dev' essere il punto O ch'è comune a queste due rette. Laonde se da un punto ec. Ch' è quel tanto, che b. d.

PROP. V. PROB. I.

Dato un cerchio, ritrovare il suo centro.

Ris. SIa ACBD (*Fig. 70.*) il cerchio dato. Si prendano nella periferia ad arbitrio i punti C, e D, i quali s' uniscano con la retta CD; indi divisa CD in due parti uguali in F, si tiri per questo punto F, la retta AB perpendicolare a CD, e si divida in due parti uguali in E (3). Dico che il punto E è il centro del cerchio.

Dim. Avendo AB diviso CD in due parti uguali, e ad angoli retti in F, in essa AB sarà il cen-

(1) *Prop. 10. lib. 1.*
(2) *Prop. 1. lib. 3.*
(3) *Prop. 10. e 11. lib. 1.*

tro (1); ma il centro deve essere nel mezzo del cerchio. Dunque è il punto E, nel quale AB s'è divisa in due parti uguali. Sicchè del dato cerchio ACBD s'è ritrovato il centro E. Ch'è ciò, che b. f., e d.

AVVERTIMENTO.

Si può ritrovare il centro d'un cerchio anche nel seguente modo; cioè tirando in esso due corde EF, FG, (*Fig.* 72.) ed alzando dai punti I, e H, ne' quali prima si sieno divise per metà, due perpendicolari IB, HD, il punto O, dove queste s'incontrano, sarà il centro ricercato (2).

PROP. VI. PROBL. II.

Dato un' arco circolare qualunque, ritrovarne il centro, e compire il cerchio, a cui esso appartiene.

Ris. SIa ABC (*Fig.* 73.) il dato arco; in questo si prendano ad arbitrio i tre punti A, B, C, e s'uniscano con le corde CB, BA, le quali divise in due parti uguali ne' punti F, e D (3), s'innalzino dai medesimi punti, le respettive perpendicolari FG, DE, che s'incontrino in O (4). Dico, che O è il centro ricercato.

Dim. Dividendo FG, DE le respettive corde CB, BA in due parti uguali, e ad angoli retti, sarà

(1) *Prop. 1. lib. 3.*
(2) *Prop. 1. lib. 3.*
(3) *Prop. 10. lib. 1.*
(4) *Prop. 11. lib. 1.*

il centro tanto in FG, quanto in DE (1); e perciò sarà il punto O comune a queste rette. Dunque se col centro O, ed intervallo OC, OA, ec. Si descriverà un cerchio, sarà compito il cerchio, al quale l'arco ABC appartiene. Ch' è quel tanto, che b. f., e d.

C A P. II.

DELLE PROPRIETA' DEL CERCHIO RELATIVAMENTE ALLE RETTE TIRATE ALLA SUA PERIFERIA.

PROP. VII. TEOR. V.

Se nella periferia d' un cerchio si prendono due punti, e s' uniscono con una linea retta, questa caderà tutta dentro del cerchio.

Nella periferia del cerchio ABC (*Fig. 74.*) si prendano ad arbitrio i punti A, e B, e s' uniscano colla retta AB. Dico, che AB tutta cade dentro del cerchio.

Dim. Si ritrovi il centro D del cerchio ABC (2), e si tirino i raggi DA, DB; di poi preso in AB il punto E ad arbitrio, si congiunga DE. Essendo nel triangolo ADB, AD uguale a DB (3), sarà l'angolo DAB uguale all' angolo DBA (4); ma nel triangolo ADE il lato AE è prolungato in B. Sicchè l' angolo DEB è maggiore dell' angolo DAE (5); e perciò maggiore ancora dell' angolo DBE. Onde nel triangolo

(1) *Prop. 1. lib. 3.*
(2) *Prop. 5. lib. 3.*
(3) *Def. 23. lib. 1.*
(4) *Prop. 25. lib. 1.*
(5) *Cor. 1. prop. 23. lib. 1.*

DEB, essendo l'angolo DEB maggiore dell'angolo DBE, sarà il lato DB maggiore del lato DE (1); ma DB giugne sino alla periferia. Dunque DE non vi giugne; e perciò il punto E cade dentro del cerchio. Nello stesso modo si dimostra, che ogni altro punto preso in AB cade dentro del cerchio. Dunque tutta AB cade dentro del cerchio. Ch'è quel tanto, che b.d.

PROP. VIII. TEOR. VI.

Se dentro d'un cerchio si prende un punto differente dal centro, e da esso si tirino alla circonferenza più rette, la massima è quella, che passa per lo centro, la minima è la restante porzione del diametro, le più vicine alla massima sono maggiori delle più distanti, e dal suddetto punto non si possono tirare più di due rette uguali.

NEl cerchio AFBC, (*Fig. 75.*) il cui diametro sia AB, si prenda il punto C differente dal centro D, e da esso si tirino alla periferia più rette CE, CF ec. Dico I., che di tutte queste rette CA è la massima; II. CB la minima; III. le più vicine alla massima sono maggiori delle più distanti; IV. finalmente, che dal suddetto punto C non si possono tirare alla periferia più di due rette uguali.

Dim. Si tirino i raggi DE, DF, e formato nel punto D l'angolo CDG uguale all'angolo CDF (2), si congiunga CG.

I. Essendo i raggi DA, DE uguali, aggiuntovi

(1) *Prop. 18. lib. 1.*
(2) *Prop. 8. lib. 1.*

CD di comune, sarà CA uguale alla somma di CD e DE, ma CD e DE sono maggiori di CE (1). Dunque anche CA è maggiore di CE. Similmente si dimostra essere CA maggiore d' ogni altra retta tirata da C alla circonferenza. Sicchè CA è la massima.

II. DB è uguale a DF, ma DF è minore della somma di DC e CF; onde ancora DB è minore della somma di DC e CF, e perciò toltone la comune DC sarà CB minore di CF. Similmente si dimostra, che CB è minore d' ogni altra retta tirata dal punto C alla periferia. Dunque CB è la minima.

III. Essendo ne' triangoli EDC, FDC il lato FD uguale al lato DF, il lato DC comune, e l' angolo EDC maggiore dell' angolo FDC, sarà la base CE anche maggiore della base CF (2). Dunque le rette più vicine alla massima sono maggiori delle più distanti.

IV. Poichè ne' due triangoli CDF, CDG il lato DF è uguale al dato DG, il lato DC è comune, e l' angolo CDF è uguale all' angolo CDG; perciò sarà la base CF uguale alla base CG. Se poi da C si tirano altre rette, queste caderanno, o al dissopra, o al dissotto del punto G; onde essendo, o più vicine alla massima, o più vicine alla minima, saranno, o maggiori, o minori di CG, ed in conseguenza anche di CE. Dunque se ec. Ch' è quel tanto, che b. d.

---

(1) *Avvertim. def. 18. lib. 1.*
(2) *Cor. prop. 2. lib. 1.*

Se fuori d' un cerchio si prende un punto, e da esso si tirano, sì alla parte concava, che alla parte convessa della periferia più rette; di quelle, che arrivano alla concava, la massima è quella, che passa pel centro, e le più vicine alla massima sono sempre maggiori delle più distanti; delle rette poi, che arrivano alla parte convessa, la minima è quella, che prolungata passa per lo centro, le più vicine alla minima sono minori delle più distanti, e dal suddetto punto; sì all' una, che all' altra parte non si possono tirare più di due rette uguali.

Fuori del cerchio HBG (*Fig. 76.*) si prenda il punto A, e da esso si tirino più rette AB, AD, AE. Dico, che di tutte quelle, che arrivano alla parte concava. I. AB, la quale passa pel centro C è la massima; II. che le più vicine alla massima sono maggiori delle più distanti; III. che di quelle, le quali arrivano alla parte convessa, AO la quale prolungata passerebbe pel centro C, è la minima; IV. le più vicine alla minima sono minori delle più distanti; V. finalmente, che dal punto A tanto alla concava, quando alla convessa parte non si possono tirare più di due rette uguali.

Dim. Si tirino i raggi CD, CE, CH, AI, e formati gli angoli ACG, ACF uguali respettivamente agli angoli ACH, ACE s' uniscano le rette AG AF.

I. essendo i raggi CB, CD uguali, aggiuntovi di comune AC; sarà AB uguale alle due AC, CD; ma queste sono maggiori di AD (1). Sicchè AB an-

(1) *Avvert. def. 18. lib. 1.*

ch' è maggiore di AD. Similmente si dimostra essere AB maggiore d'ogni altra retta, tirata dal punto A. Dunque AB è la massima.

II. Essendo ne' triangoli ACD, ACE, il lato CD uguale a CE, il lato AC comune, e l'angolo ACD maggiore dell' angolo ACE, sarà la base AD, maggiore di AE (1); e perciò le rette più vicine alla massima AB sono maggiori delle più distanti.

III. Nel triangolo AIC il lato AC è minore dei due AI, IC, onde toltone le porzioni uguali CO, CI, rimarrà AO minore di AI. Similmente si dimostra, essere AO minore d' ogni altra retta tirata alla parte convessa. Sicchè AO è la minima.

IV. Poichè ne'triangoli AIC, AHC il lato CI è uguale a CH, CA comune, e l'angolo ACI è minore dell' angolo ACH; sarà la base AI minore della base AH (2). Dunque le rette più vicine alla minima AO sono minori delle più distanti.

V. Essendo ne' triangoli ACF, ACE i due lati AC, CF, e l'angolo ACF uguale all' angolo ACE; sarà AF uguale ad AE; ed essendo finalmente nei triangoli ACG, ACH, il lato CG uguale a CH, il lato AC comune, e l' angolo ACG uguale all' angolo ACH; sarà anche AG uguale ad AH (3). Se poi da A si tirano altre rette, e giungono alla parte concava, queste saranno maggiori, o minori di AE a proporzione, che saranno più, o meno vicine alla massima AB; se arrivano alla parte convessa, saranno minori, o maggiori di AH, secondochè saranno più, o meno vicine alla minima AO. Dunque dal punto A,

---

(1) *Cor. prop. 2. lib. 1.*
(2) *Cor. prop. 2. lib. 1.*
(3) *Prop 2. lib. 1.*

sì alla concava, che alla convessa parte, non si possono tirare più di due rette uguali. Ch'è ciò, che b.d.

PROP. X. PROB. VII.

Se dentro d'un cerchio si tirano più corde uguali, queste saranno egualmente distanti dal centro; e se sono egualmente distanti dal centro, saranno eguali tra loro.

NEl cerchio ABCD (*Fig.* 77.), si tirino le corde AB, DC. Dico I., che se AB, DC sono uguali, hanno uguali distanze dal centro E; cioè uguali sono le perpendicolari EF, EG; II., che se hanno uguali distanze dal centro E, sono uguali tra loro.

Dim. I. Poichè le rette EF, EG passano pel centro E, e segano AB, DC, che non vi passano ad angoli retti, le segano anche in due parti uguali ne' punti F, e G (1). Onde BF, CG essendo le rispettive metà delle rette uguali BA, CD, saranno ancora uguali; e perciò uguali eziandio i loro quadrati. In oltre, congiunte le rette EB, EC, essendo i triangoli EFB, EGC rettangoli in F, e G; sarà, sì il quadrato di EB uguale ai quadrati di EF, FB, che il quadrato di EC uguale ai quadrati di EG, GC (2); ma per essere EB, EC uguali, uguali sono i loro quadrati. Sicchè anche i quadrati di BF, FE sono uguali ai quadrati di BG, GE; onde togliendone i due uguali di BF, e FH, uguali rimarranno ancora i quadrati di EF, EG; ed in conseguenza sarà EF uguale ad EG.

II. Essendo uguali le distanze EF, EG, uguali

(1) *Prop.* 2. *lib.* 3.
(2) *Prop.* 12. *lib.* 2.

saranno i loro quadrati; ma per essere i quadrati di BF, FE uguali ai quadrati di CG, GE, con toglierne i quadrati uguali di EF, EG, uguali rimarranno etiandio i quadrati di BF, CG, e conseguentemente le rette BF, CG. Dunque uguali saranno ancora l'intere AB, DC. Ch'è quel tanto, che b. d.

PROP. XI. TEOR. IX.

La massima di tutte le rette tirate dentro d'un cerchio è il diametro, cioè quella che passa per lo centro; e le più vicine al centro sono sempre maggiori delle più distanti.

DEntro del cerchio AGBP (*Fig.* 76.) si tirino il diametro AB, e le rette GH, EF, Dico I., che AB è la massima; II., che GH, la quale è più vicina al centro O è maggiore di EF, che n'è più distante.

Dim. I. Essendo O centro del cerchio AHFE, congiunti i raggi OG, OH, saranno tra loro uguali, sì le rette OA, OG, che le rette OB, OH; e perciò AB è uguale alla somma di GO OH; ma queste sono maggiori di GH (1). Sicchè ancora AB è maggiore di GA; nello stesso modo si dimostra, essere AB maggiore d'ogni altra retta, che non passa pel centro. Dunque AB è la massima.

II. S'abbassino dal centro O le perpendicolari OL, OP sulle rette GH, EF. Essendo EF più distante dal centro di GH, sarà OP maggiore di OL (2); onde tagliata OI uguale ad OL si tiri per I, CD parallela ad EF, e s' uniscano i raggi OC, OE, OD,

---

(1) *Avvert. def. 18. lib. 1.*
(2) *Def. 4. lib. 3.*

OF. Avendo i triangoli COD, EOF i lati CO, OD uguali ai lati EO, OF, e l'angolo COD maggiore dell'angolo EOF; sarà la base CD maggiore di EF (1); ma CD, GH essendo egualmente distanti dal centro O sono uguali (2). Dunque anche GH è maggiore di EF. Ch'è quanto b. d.

PROP. XII. TEOR. X.

Se dall'estremità del diametro s'innalza una retta ad esso perpendicolare, questa caderà tutta fuori del cerchio, cioè sarà tangente; e dal punto del contatto non si può, tra la tangente e la periferia, tirare un'altra linea retta.

Sia ACB (*Fig.* 79.) un cerchio, il cui centro sia F, ed il diametro AB; a questo dall'estremo B s'alzi la perpendicolare BD. Dico I., che BD è tangente del cerchio BCA nel punto B; II., che dal punto del contatto B, tra la tangente BD e la periferia BCA, non si può tirare un' altra linea retta.

Dim. I. Si prenda in BD ad arbitrio il punto E, e s'unisca FE. Essendo nel triangolo FBE l'angolo in B retto per l'ipotesi, sarà l'angolo in E acuto; e perciò minore del retto FBE. Onde il lato FE è maggiore di FB (3), e conseguentemente maggiore di FG. Sicchè il punto E si ritrova fuori del cerchio; similmente si dimostra, che ogni altro punto della retta BD cade fuori del cerchio ACB. Dunque BD è tangente nel punto B (4).

---

(1) *Coro. prop. 2. lib. 1.*
(2) *Prop. 10. lib. 3.*
(3) *Prop. 18. lib. 1.*
(4) *Def. 2. lib. 3.*

II. Si tiri, s'è possibile, dal punto B tra la tangente BD, e la periferia BCA la retta BO. Giacchè l'angolo FBD è retto, sarà FBO acuto. Onde non essendo FB perpendicolare a BO, si cali dal centro F su BO la perpendicolare FO. Nel triangolo FOB l'angolo retto FOB è maggiore dell'acuto FBO. Dunque il lato FB, e conseguentemente FC è maggiore del lato FO, cioè la parte maggiore del tutto; ma ciò ripugna. Sicchè ripugna ancora potersi, tra la tangente, e la periferia, tirare un' altra linea retta. Ch'è quel tanto, che b. d.

COROLLARIO.

Non potendosi dal punto B, tra la tangente BD, e la periferia BCA, tirare un' altra linea retta; è chiaro che l'angolo mistilineo DBC, chiamato dai Geometri *angolo del contatto*, sia il minimo di tutti gli angoli acuti; e l'angolo mistilineo CBA, che appellasi *angolo del semicerchio* sia il massimo di tutti gli acuti.

PROP. XIII. TEOR. XI.

Se una retta è tangente d' un cerchio; sarà perpendicolare al raggio tirato dal punto del contatto.

Sia CG (*Fig.* 80.) tangente del cerchio ADB nel punto B, e si tiri dal punto del contatto B il raggio BF. Dico che EF è perpendicolare a CG.

Dim. Se si niega essere FB perpendicolare a CG, si cali, s'è possibile, dal centro F un'altra retta FG, che sia perpendicolare a CG. Essendo nel triangolo FEB l'angolo in E retto, sarà l'angolo FBE acuto; e perciò il lato FB opposto all'angolo maggiore,

è maggiore di FE (1); ma FB è uguale a FD (2). Dunque eziandio FD è maggiore di FE, cioè la parte maggiore del tutto; ma ciò ripugna. Sicchè ripugna ancora che FB non sia perpendicolare alla tangente, CG. Ch'è quel tanto, che b. d.

PROP. XIV. TEOR. XII.

Se una retta è tangente d'un cerchio, e dal punto del contatto s' innalza sulla medesima una perpendicolare, questa passerà pel centro del cerchio.

SIa CG (*Fig. 80.*) tangente del cerchio ADB nel punto B, dal quale s' innalzi BA perpendicolare alla detta CG. Dico, che BA passa per lo centro.

Dim. Se si niega passare AB per lo centro, sia il centro nel punto O fuori di AB, e da esso si tiri al punto del contatto B il raggio OB, sarà OB perpendicolare a CG (3); e conseguentemente l' angolo OBC essendo retto, sarà uguale all' angolo FBC, anche retto per l' ipotesi (4); onde sarebbe la parte uguale al tutto; ma ciò ripugna. Dunque ripugna ancora, che BA non passi pel centro. Ch'è ciò, che b. d.

---

(1) *Prop. 28. lib. 1.*
(2) *Prop. 23. lib. 1.*
(3) *Pro. preced.*
(4) *Ass. 12.*

PROP. XV. PROB. III.

Dato un punto fuori d' un cerchio, tirare dal dato punto una tangente al cerchio.

Ris. Sieno A (*Fig. 81.*) il punto, e CE il cerchio dato. Dal punto A al centro B del cerchio si tiri la retta AB, che intersechi la periferia in C. Indi col centro B, ed intervallo BA si descriva l' arco circolare AD; e dal punto C innalzata CD perpendicolare a BA (1), che incontri l' arco AD nel punto D, si congiunga la retta DB, la quale sega la periferia CE in E. Finalmente dal punto A al punto E si tiri la retta AE. Dico, essere AE la tangente ricercata.

Dim. Poichè B è centro comune de' cerchi CE, AD, sarà, sì CB uguale a BE, che AB uguale a BD. Onde essendo i due lati AB, BE del triangolo ABE uguali respettivamente ai due lati DB, BC del triangolo DBC, e l' angolo in B comune; sarà ancora l' angolo BEA uguale all' angolo BCD (2); ma questo per la costruzione è retto. Sicchè retto ancora è l' angolo BEA; e perciò AE, essendo perpendicolare al raggio EB è tangente nel punto E (3). Per la qual cosa dal punto A s' è tirata la tangente AE al cerchio CE. Ch' è ciò, che b. f., e d.

AVVERTIMENTO.

Se poi si volesse tirare una tangente al cerchio ADB (*Fig. 80.*) dal punto B dato nella medesima

---

(1) *Pro. 11. lib. 1.*
(2) *Pro. 2. lib. 1.*
(3) *Pro. 12. lib. 3.*

sua periferia; in tal caso, congiunto pria il raggio BF, s' innalzi da B la retta BC perpendicolare al suddetto raggio BF, sarà BC la tangente desiderata.

CAP. III.

DELLE PROPRIETA' DE' CERCHI, CHE S' INTERSECANO, O SI TOCCANO.

PROP. XVI. TEOR. XIII.

Se due cerchi scambievolmente si segano non possono esser concentrici, cioè avere un medesimo centro.

S' Intersechino scambievolmente i due cerchi ABCD, ALCF (*Fig. 82.*) ne' punti A, e C. Dico, che non possono avere un medesimo centro.

Dim. Abbiano, s' è possibile, i suddetti cerchi un medesimo centro e sia E, dal quale, tirata al punto A la retta AE, si tiri comunque l' altra retta EF, che seghi le periferie d' amendue ne' punti D, ed F. Essendo E centro del cerchio ABCD, sarà ED uguale ad AE; ed essendo il medesimo punto E anche centro dell' altro cerchio ALCF, sarà eziandio EF uguale ad EA. Onde alla terza EA è uguale tanto ED, quanto EF; e perciò sarà la parte ED uguale al tutto EF (1); ma ciò ripugna. Dunque ripugna ancora, che i cerchi, che s' intersechino abbiano un medesimo centro. Ch' è quel tanto, che b. d.

---

(1) *Assi. 1.*

PROP. XVII. TEOR. XIV.

Se due cerchi si toccano al di dentro non possono esser concentrici.

Si tocchino i due cerchi ABC, (*Fig.* 83) ADF al di dentro in A. Dico che non possono avere un medesimo centro.

Dim. Abbiano, s'è possibile per centro comune il punto E, e congiunta AE, si tiri comunque la retta FB, che seghi le periferie de' due cerchi nei punti B, e D. Poichè E è centro del cerchio ADF, sarà ED uguale ad EA; ma per essere eziandio centro dell'altro cerchio ABC, anche EB è uguale ad EA (1). Sicchè essendo alla terza EA uguale tanto ED, quanto EB, sarà la parte ED uguale al tutto EB; ma ciò ripugna. Dunque ripugna ancora, che i cerchi ABC, ADF, i quali si toccano al di dentro in A, abbiano un medesimo centro. Ch'è quel tanto, che b. d.

PROP. XVIII. TEOR. XV.

Se due Cerchi scambievolmente si segano, non possono segarsi in più di due punti.

Dim. S'Intersechino, s'è possibile, i cerchi ABCD, AEDF (*Fig.* 84.) in tre punti A, B, C; e ritrovato il centro G del cerchio ABCD (2), si tirino i raggi GA, GB, GC, i quali saranno conseguentemente uguali; e poichè dal punto G preso dentro del cerchio

---

(1) *Def.* 23.
(2) *Prop.* 5. *lib.* 3.

AEDF si sono tirate alla sua periferia le tre rette uguali GA, GB, GC, sarà G centro ancora del cerchio AEDF. Dunque i cerchi, che s' intersecano hanno un medesimo centro; ma quest'è impossibile (1). Sicchè è impossibile eziandio, che possono due cerchi intersecarsi in più di due punti. Ch'è ciò, che b. d.

PROP. XIX. TEOR. XVI.

Se due cerchi si toccano al di dentro, la retta, che unisce i loro centri, prolungata passa pel punto del contatto.

Si tocchino al di dentro nel punto A (*Fig.* 85.) i due cerchi ABC, ADE. Dico che la retta, la quale unisce i loro centri prolungata passa pel punto del contatto A.

Dim. Se ciò si niega, sieno, s'è possibile, F centro del cerchio grande, e G del piccolo, tali, che la retta FG, che li congiugne non passi per A, ma seghi la periferia del primo ne' punti B e C, e la periferia del secondo in D, ed E; e si uniscano le rette AF, AG. Essendo G centro del cerchio ADE, sarà GE uguale a GA, ed aggiuntovi di comune GF sarà FE uguale alla somma di FG, e GA; ma sono queste maggiori di FA (2). Sicchè sarà anche FE maggiore di FA. In oltre, essendo F centro del cerchio ACB, sarà FC uguale ad FA; ma s'è dimostrato FE maggiore di FA. Dunque sarà FE maggiore ancora di FC, cioè la parte maggiore del tutto; il che ripugna. Laonde ripugna ancora, che la retta, la quale congiugne i centri di due cerchi,

(1) *Prop.* 16. *lib.* 3.
(2) *Avver. def.* 18.

che si toccano al di dentro, non passi pel punto del contatto. Ch'è quel tanto, che b. d.

PROP. XX. TEOR. XVII.

Se due cerchi si toccano al di fuori, la retta, che unisce i loro centri, passa pel punto del contatto.

SI tocchino i due cerchi ABC, (*Fig. 86.*) ADE al di fuori nel punto A. Dico, che la retta, la quale unisce i loro centri, passa per lo punto del contatto A.

Dim. Sieno, s'è possibile, i centri F, e G di questi cerchi tali, che la retta FG che li congiunge non passi pel punto del contatto A, ma seghi la periferia del cerchio ABC nel punto C, e la periferia del cerchio AED nel punto E, e si uniscano le rette AF, AG. Supponendosi F centro del cerchio ABC, e G centro del cerchio ADE, sarà, sì FA uguale ad FC, che GA uguale a GE (1); ma nel triangolo FAG i due lati FA, AG sono maggiori del terzo FG. Sicchè anche le parti FC, GE sarebbero maggiori del loro tutto FG; ma ciò è impossibile. Dunque è impossibile ancora, che la retta, la quale unisce i centri di due cerchi, che si toccano al di fuori non passi pel punto del contatto. Ch'è ciò, che b. d.

PROP. XXI. TEOR. XVIII.

Se due cerchi si toccano, o al di dentro, o al di fuori, non possono toccarsi, che in un sol punto.

SI tocchino I. i cerchi ABCD, (*Fig. 87.*) ADE al di dentro in A; II. si tocchino i cerchi ABC,

---

(1) *Def.* 23.

BHL al di fuori in A. Dico, che, sì i primi, come i secondi si toccano nel solo punto A.

Dim. I. S'uniscano i centri F, e G dei cerchi ABC, ADE con la retta AC, la quale prolungata passerà pel punto del contatto A (1); e di poi si tiri da G la retta GB, che seghi le due periferie in B, e D. Poichè dentro del cerchio ABC, dal punto G diverso dal centro F, si sono tirate più rette, sarà GA la minima, e perciò minore di GB (2), ma GA è uguale a GD (3). Dunque anche GD è minore di GB; onde i cerchi ne' punti D, e B non si toccano. Similmente si dimostra, che non si toccano in altro punto. Sicchè nel solo punto A si toccano.

II. Si uniscano i centri F, ed I con la retta FI, la quale passa pel punto del contatto A (4); indi si tiri comunque l'altra retta IB, che seghi le periferie de' cerchi AHL, ABC ne' punti L, e B. Fuori del cerchio ABC s'è preso il punto I, dal quale si sono tirate alla parte convessa più rette. Sicchè IA come minima, sarà minore di IB (5); ma IA è uguale ad IL (6). Laonde sarà anche IL minore di IB; e perciò questi cerchi ne' punti L, e B non si toccano. Similmente si dimostra, che non si toccano in altro punto. Dunque nel solo punto A si toccano. Ch'è quel tanto, che b. d.

---

(1) *Prop. 19. lib. 3.*
(2) *Prop. 8. lib. 3.*
(3) *Def. 23. lib. 1.*
(4) *Prop. 20. lib. 3.*
(5) *Prop. 9. lib. 1.*
(6) *Def. 24. lib. 1.*

CAP. IV.

DELLE PROPRIETA' DE' CERCHI RELATIVE AGLI ANGOLI IN ESSI FORMATI.

PROP. XXII. TEOR. XIX.

L'angolo al centro è sempre il doppio dell' angolo alla periferia; purchè appoggino ambidue al medesimo arco.

APpoggino al medesimo arco BC, (*Fig. 88.*) sì l' angolo BOC al centro, che l' angolo BAC alla periferia. Dico che l'angolo BOC è il doppio dell' angolo BAC.

Dim. Dal punto A al centro O si tiri la retta AO, e si prolunghi in D; questa, o caderà tra i lati dell' angolo BOC, o fuori. Nel caso.

I. Poichè OA è uguale ad OB, saranno gli angoli OAB, OBA del triangolo OAB uguali (1); ma il lato AO è prolungato in D. Sicchè essendo l'angolo esterno BOD uguale alla somma de' due interni opposti, sarà il doppio del solo BAO; per la stessa ragione, dovendo essere nel triangolo esterno COD il doppio dell' angolo CAO sarà l' intero angolo BOC il doppio dell' intero BAC.

II. Essendosi il lato AO (*Fig. 89.*) de' triangoli isosceli AOC, ACB prolungato in D; sarà, sì l' angolo esterno DOC il doppio dell' angolo DAC, che l' angolo DOB il doppio dell' angolo DAB. Onde se dall' angolo DOC si toglierà l' angolo DOB, e dall' angolo DAC si toglierà l' angolo DAB; rimarrà eziandio l' angolo BOC il doppio dell' angolo BAC.

---

(1) *Prop. 25. lib. 1.*

Dunque l'angolo al centro ec. Ch' è quel tanto, che b. d.

COROLLARIO.

Si è negli avvertimenti alla prop. 8. del primo libro osservato, che ogni angolo è di tanti gradi, di quanti è l'arco compreso tra i suoi lati, e descritto col suo vertice come centro; ma l' angolo alla periferia è la metà dell'angolo al centro. (*Fig. 88.*) Dunque, sebbene ogni angolo al centro sia di tanti gradi quanti ne dinota l' arco sul quale appoggia, quello però alla circonferenza è di tanti gradi, quanti ne dinota la metà del suddetto arco. Sicchè se l'arco BC fosse di 20 gradi, sarebbe l' angolo BOC di 20 gradi; ma è l'angolo BAC di 10.

PROP. XXIII. TEOR. XX.

Gli angoli situati nella medesima porzione di cerchio sono sempre uguali tra loro.

Rappresenti ABCD (*Fig. 90.*) qualunque porzione di cerchio, nella quale vengano situati gli angoli ABD, ACD. Dico, che tali angoli sono fra loro uguali.

Dim: Essendo gli angoli ABD, ACD, situati nella medesima porzione di cerchio, appoggiano sull' istesso arco AD. Laonde sarà, sì l' angolo ABD, che l' angolo ACD di tanti gradi, quanti ne dinota la metà del suddetto arco AD (1); e perciò l' angolo ABD è uguale all' angolo ACD (2). Dunque gli angoli ec. Ch' è ciò, che b. d.

---

(1) *Corol. preced.*
(2) *Ass. 1.*

PROP. XXIV. TEOR. XXI.

In ogni quadrilatero iscritto in un cerchio la somma degli angoli opposti è uguale a due retti.

SIa nel cerchio ABCD (*Fig.* 91.) iscritto il quadrilatero ABCD; cioè tocchi coi vertici de' suoi angoli la periferia del dato Cerchio. Dico, che la somma degli angoli opposti A, e C, ovvero B, e D è uguale a due retti.

Dim. Appoggiando l'angolo A sull' arco BCD, e l' angolo C sull' arco BAD. È chiaro che tutti e due insieme presi appoggiano sull' intera periferia ABCD. Per la qual cosa essendo di tanti gradi, quanti ne dinota la metà della detta periferia (1), saranno di 180 gradi, e conseguentemente uguali a due retti. Similmente si dimostra essere gli angoli B, e D uguali a due retti. Dunque in ogni ec. Ch' è quel tanto, che b. d.

PROP. XXV. TEOR. XXII.

Ogni angolo situato nel semicerchio è retto; situato nella porzione maggiore del semicerchio è acuto, e finalmente nella minore è ottuso.

SI tiri nel cerchio ABDE (*Fig.* 92.) il diametro AD, e si formi nel semicerchio ABD l'angolo ABD; nella porzione maggiore BAED l'angolo BED, e nella minore l' angolo BCD. Dico I., che l' angolo ABD è retto; II., che l'angolo BED è acuto; e III., che l'angolo BCD è ottuso.

Dim. I. Essendo l' angolo ABD nella periferia,

---

(1) *Corol. prop.* 32. *lib.* 3.

sarà di tanti gradi (1), quanti ne dinota la metà dell'arco AED sul quale appoggia; ma l'arco AED è di 180 gradi. Dunque l'angolo ABD è di 90 gradi, e conseguentemente retto.

II. Nel triangolo ABD essendo l'angolo ABD retto, sarà l'angolo BAD acuto; ma gli angoli BAD, BED, come esistenti nella medesima porzione sono uguali (2). Sicchè anche l'angolo BED è acuto.

III. La figura BEDC è un quadrilatero iscritto in questo cerchio; e perciò la somma degli angoli opposti BCD, BED è uguale a due retti (3); ma l'angolo in E s'è dimostrato acuto. Dunque l'angolo C è ottuso. Sicchè ogni angolo ec. Ch'è quel tanto, che b. d.

PROP. XXVI. TEOR. XXIII.

Se una retta è tangente d'un cerchio, e dal punto del contatto se ne tira un'altra, che sia secante; gli angoli formati dalla tangente, e dalla secante sono uguali agli angoli situati nelle alterne porzioni del cerchio.

Sia la retta GF (*Fig.* 93.) tangente del cerchio ABCD nel punto A, e da questo punto A si tiri AD che seghi il cerchio nelle due porzioni ABCD, AED. Dico che l'angolo DAF è uguale all'angolo ABD, e l'angolo DAG è uguale all'angolo AED.

Dim. Dal punto del contatto A si tiri il diametro AC, e si unisca CD. Nel triangolo ACD essendo l'an-

---

(1) *Corol. prop. lib. 3.*
(2) *Prop. 33. lib. 3.*
(3) *Prop. preced.*

golo ADC retto (1), gli altri due DCA, DAC insieme presi sono uguali ad un retto, e conseguentemente all' angolo CAF; onde toltone il comune CAD, rimarrà l' angolo DAF, uguale all' angolo ACD; ma gli angoli ACD, ABD, essendo formati nella medesima porzione, sono tra loro uguali (2). Dunque sarà l' angolo DAF anche uguale all' angolo ABD. Gli angoli DAF, DAG sono uguali a due retti (3); similmente uguali a due retti sono gli angoli E, e B opposti del quadrilatero ABDE (4). Laonde sarà la somma de' primi DAF, DAG uguale alla somma de' secondi B, ed E; ma l' angolo DAF s' è dimostrato uguale all' angolo B. Dunque tolti quest' angoli uguali, sarà l' angolo DAG uguale all' angolo AED. Sicchè ec. Ch' è quel tanto, che b. d.

PROP. XXVII. TEOR. XXIV.

Se una retta esistente fuori del cerchio incontra la periferia in un punto, e forma colla corda tirata dal medesimo punto un angolo uguale all' angolo fatto nell' alterna porzione pel cerchio; sarà una tale retta tangente.

Incontri la retta FA (*Fig.* 93.) la periferia del cerchio ABCD in A, e sia l' angolo FAD uguale all' angolo formato nella porzione alterna ABCD. Dico che FA è tangente nel punto A.

Dim. Dal punto A si tiri il diametro AC; e s' unisca CD. Essendo l' angolo FAD uguale all' angolo

(1) *Prop.* 25. *lib.* 3.
(2) *Prop.* 23. *lib.* 3.
(3) *Prop.* 13. *lib.* 1.
(4) *Prop.* 24. *lib.* 3.

formato nella porzione alterna ABCD, sarà uguale all'angolo ACD; e perciò aggiuntovi di comune l'angolo CAD sarà l'intero angolo CAF uguale ai due DCA, DAC; ma nel triangolo CAD, per essere l'angolo CDA retto (1); è la somma degli altri due DCA, DAC uguale ad un retto. Dunque retto sarà ancora l'angolo CAF. Sicchè la retta AF essendo perpendicolare al diametro AC è tangente in A. Ch' è ciò che b. d.

PROP. XXVIII. BROBL. IV.

Dato un' angolo, ed una retta; costruire su questa una porzione di cerchio capace di contenere angoli uguali al dato.

Ris. Sia DAB (*Fig.94.*) il dato angolo, e AB la retta data. Dal punto A s' innalzi AE perpendicolare a CA, e si formi nel punto B della retta AB l'angolo ABO uguale all'angolo BAO (2), il cui lato BO si prolunghi finchè seghi AE in O; col centro O ed intervallo OA si descriva il cerchio AEB, il quale per l' uguaglianza degli angoli OAB, OBA, e conseguentemente de' lati OA, OB (3); passerà ancora pel punto B. Dico che AEB è la porzione ricercata.

Dim. Essendo CD perpendicolare al raggio AO, sarà tangente nel punto A (4). Dunque l'angolo CAB è uguale agli angoli contenuti nella porzione alterna AFB (5). Laonde sulla retta AB s' è formata la por-

(1) *Prop.* 25. *lib.* 3.
(2) *Prop.* 8. *lib.* 1.
(3) *Prop.* 26. *lib.* 1.
(4) *Prop.* 12. *lib.* 3.
(5) *Prop.* 26. *lib.* 3.

zione AEB capace di contenere angoli uguali al dato. Ch' è quel tanto, che b. d.

PROP. XXIX. PROB. V.

Dato un cerchio ed un' angolo, tagliare dal dato cerchio una porzione capace di contenere angoli uguali al dato.

Sia ABCE (*Fig.* 93.) il dato cerchio, ed L l'angolo dato. Si tiri la retta FG tangente del cerchio nel punto A; e si formi in A l' angolo FAD uguale al dato L (1). Dico che la porzione ABCD, segata dalla retta AD, è la ricercata.

Dim. L' angolo FAD ma l' angolo FAD essendo formato dalla tangente FA, e dalla secante AD è uguale agli angoli della porzione alterna ABCD (2). Sicchè anche l' angolo L è uguale agli angoli della porzione ABCD. Dunque dal dato cerchio s' è tagliata la porzione ABCD capace di contenere angoli uguali al dato L. Ch' è quel tanto, che b. f., e d.

PROP. XXX. TEOR. XXV.

Sopra una medesima retta non si possono formare due porzioni circolari simili, e disuguali.

Sia ACB (*Fig.* 95.) qualunque porzione di cerchio situata nella retta AB, Dico, che sulla medesima retta AB non si può formare un' altra porzione simile, e disuguale alla prima ABC.

Dim. Si formi, s' è possibile, l' altra porzione

---

(1) *Prop. 8. lib. 1.*
(2) *Prop. 28. lib. 2.*

ADB, e tirata la retta ACD che seghi le periferie ne' punti C, e D, s' uniscono le rette DB, CB. Essendo le porzioni ACB, ADB simili per la supposizione; sarà l'angolo ACB uguale all' angolo ADB (1); ma nel triangolo BDC il lato DC è prolungato in A. Sicchè l' angolo esterno ACB sarebbe uguale, all' interno opposto ADC; il che essendo impossibile; è impossibile ancora, che si possono formare sopra una medesima retta due porzioni simili, e disuguali. Ch' è quel tanto, che b. d.

PROP. XXXI. TEOR. XXVI.

Se sopra due rette uguali si formano due porzioni circolari simili; saranno tali porzioni anche uguali.

Sopra le due rette uguali AB, CD (*Fig.* 96.) si formino le porzioni simili AEB, CFD. Dico che tali porzioni sono eziandio uguali.

Dim. Si concepisca la porzione AEB posta sulla porzione CFD in modo, che il punto A cada nel punto C, e la retta AB nella retta CD; essendo AB uguale a CD caderà ancora il punto B nel punto D; e per conseguenza la porzione ACB combacia con la porzione CFD, altrimenti sopra una medesima retta si potrebbero formare due porzioni simili, e disuguali; il ch' è impossibile (2); ma le grandezze che combaciano sono uguali. Dunque la porzione AEB è uguale alla porzione CFD. Ch' è ciò, che b. d.

---

(1) *Def.* 7. *lib.* 3.
(2) *Prop. prec.*

PROP. XXXII. TEOR. XXVII.

Se di centri o alle periferie di due cerchi uguali si formano due angoli uguali, uguali saranno ancora gli archi su quali appoggiano; e se uguali sono gli archi, uguali saranno gli angoli, che v'appoggiano, o che sieno fatti ai centri, o alle periferie di tali cerchi.

Sieno ABC, DEF (*Fig.* 97.) due cerchi uguali, e si formino ne' centri G, e H gli angoli AGC, DHF, e nelle periferie gli angoli ABC, DEF. Dico I., che se tali angoli sono uguali, uguali saranno anche gli archi AC, DF; II., che se sono uguali gli archi AC, DF, uguali saranno gli angoli, che v'appoggiano.

Dim. I. Essendo uguali i cerchi ABC, DEF, congiunte le corde AC, DF, saranno i due lati AG, GC del triangolo AGC respettivamente uguali ai due lati DH, HF del triangolo DHF (1); sono di più uguali per l'ipotesi gli angoli AGC, DHF. Sicchè uguali saranno ancora le basi AC, DF. Onde le porzioni ABD DEF, che per l'uguaglianza degli angoli ABC, DEF sono simili, appoggiando sulle rette uguali AC, DF, sono eziandio uguali (2). Dunque se dai cerchi BAC EDF si toglieranno le dette porzioni ABC, DEF, uguali saranno ancora le rimanenti porzioni AIC, DKF (3), e conseguentemente sarà l'arco AIC uguale all'arco DKF.

II. Sia l'arco AIC uguale all'arco DKF: se l'angolo AGC non è uguale all'angolo DHF, sarà, o maggiore, o minore; sia s'è possibile maggiore. Onde nel punto G

---

(1) *Def. 1. lib. 3.*
(2) *Prop. preced.*
(3) *Assi. 3.*

della retta GA si faccia l'angolo AGI uguale all' angolo DHF (1); sarà l' arco AI uguale a DKF (2); ma per l' ipotesi l'arco AIC è anche uguale a DKF. Sicchè l'arco AI è uguale ad AIC (3); cioè la parte uguale al tutto; ma ciò ripugna. Dunque ripugna ancora, che l' angolo AGC non sia uguale all' angolo DHF, e conseguentemente l'angolo ABC uguale all' angolo DEF. Per la qual cosa se ai centri ec. Ch' è quel tanto, che b. d.

PROP. XXXIII. TEOR. XXVIII.

Se in cerchi uguali si tirano corde uguali, queste dividono le periferie in archi uguali; e se dividono le periferie in archi uguali, sono tali corde uguali fra loro.

Sieno ABC, DEF (*Fig.* 97.) due cerchi uguali, ne' quali si tirino le corde AC, EF. Dico I., che se le corde AC, DF sono uguali, uguali ancora sono gli archi da esse divisi, cioè AIC uguale a DKF, e ABC uguale a DEF; II., che se uguali sono i detti archi, uguali eziandio sono le corde AC, DF.

Dim. I. Poichè, congiunti i raggi AG, GC, DH, HF, ne' due triangoli AGC DHF i lati AG, GC sono uguali ai lati DH, HF; e la base AC è uguale alla base DF, sarà l' angolo AGC uguale all' angolo DHF (4), ed in conseguenza l'arco AC uguale all'arco DF (5); onde tolti questi dall' intere periferie uguali, rimarrà anche l'arco ABC uguale all' arco DEF.

---

(1) *Prop.* 8. *lib.* 1.
(2) *Parte preced.*
(3) *Assi.* 1.
(4) *Prop.* 1. *lib.* 1.
(5) *Prop. preced.*

II. Sieno uguali gli archi AC, DF saranno ancora uguali gli angoli AGC DHF (1). Sicchè ne' triangoli AGC DHF essendo, non solo i lati AG, CG uguali ai lati DH HF, ma eziandio uguali gli angoli AGC, DHF, saranno le basi AC, DF anche tra loro uguali (2). Dunque se ec. Ch' è ciò, che b. d.

PROP. XXXIV. PROB. VI.

Dato un' arco di Cerchio dividerlo in due parti uguali.

Ris. SIa ACB (*Fig. 98.*) l' arco dato. Dal punto A al punto B si tiri la retta AB, la quale divisa in due parti uguali in D, s' innalzi da D la perpendicolare (3). Dico che l' arco ACB è diviso in due parti uguali in C.

Dim. Imperocchè, congiunte le corde AC CB, ne' triangoli ADC, BDC il lato AD è uguale a BD, DC è comune, e gli angoli ADC, BDC sono uguali, come retti. Dunque la base AC è uguale alla base CB; ma corde uguali sottendono archi uguali (4). Sicchè l' arco AC è uguale all' arco CB, e perciò s'è il dato arco ACB diviso in due parti uguali nel punto C. Ch' è quel tanto, che b. f., e d.

AVVERTIMENTO.

Essendo gli archi le misure degli angoli; chiaramente si comprende, che siccome impossibile è divi-

(1) *Prop. preced.*
(2) *Prop. 2. lib. 1.*
(3) *Prop. 10. e 11. lib. 1.*
(4) *Prop. preced.*

dere un' angolo rettilineo in 3, e 5 parti uguali, così impossibil' eziandio è dividere un' arco in 3, e 5 parti uguali. Nulladimeno però il solo angolo retto e conseguentemente l' arco, che lo misura si può con metodi particolari dividere in 3 parti uguali, come adesso vedremo, e in 5, come si dirà nel libro quarto.

Sia dunque da dividersi in tre parti uguali l' angolo retto ABC (*Fig. 99*). Sopra il lato BC si formi il triangolo equilatero BDC (1), e l' angolo EBC si divida in due parti uguali colla retta BE (2). Sarà in questo modo diviso l' angolo retto ABC nelle tre parti uguali ABD, DBC. Imperocchè essendo DBC un' angolo del triangolo equilatero, sarà un terzo di due retti, ovvero due terzi d' un tutto, e perciò ognuno degli angoli ABD, DBE, EBC è un terzo d' un retto; conseguentemente s' è diviso l' angolo retto ABC in tre parti uguali.

---

(1) *Prop. 4. lib.* 1.
(2) *Prop. 9. lib.* 1.

CAP. VI.

DE' RETTANGOLI, E QUADRATI FATTI SULLE RETTE, CHE S' INCONTRANO, O DENTRO O FUORI LA PERIFERIA DEL CERCHIO.

PROP. XXXV. TEOR. XXIX.

Se due rette s' intersecano dentro d' un cerchio, il rettangolo fatto dalle parti dell' una è uguale al rettangolo fatto dalle parti dell' altra.

S' intersechino nel cerchio ACBD (*Fig. 100.*) le due rette AB, CD in E. Dico, che in tutt' i casi, il rettangolo fatto dalle parti AE, EB è uguale al rettangolo fatto dalle parti CF, ED.

I. S' intersechino AB, e CD nel centro E. Poichè in tal caso le rette AE, EC, CE, ED, come raggi sono uguali; perciò è chiaro, che il rettangolo di AE, EB uguaglia il rettangolo di CE, BD.

II. Passi in secondo luogo AB per lo centro E, e seghi CD, (*Fig. 101.*) che non vi passa ad angoli fatti in E, la segherà ancora in due parti uguali (1); e perciò il rettangolo di DE, ED sarà lo stesso, che il quadrato di CE, si congiunga FG. Essendo AB divisa in due parti uguali in F, e in due parti disuguali in E; sarà (2) il rettangolo di AE, EB, insieme col quadrato di EF, uguale al quadrato di FB, ovvero FG, e conseguentemente uguale ai quadrati di FE, EG; onde toltone il comune quadrato di FE; sarà il rettangolo di AE, EB uguale al quadrato di EC, o sia al rettangolo di CE, ED.

(1) *Pro. 2. lib. 3.*
(2) *Prop. 8. lib. 2.*

III. Passi in oltre AB (*Fig. 101.*) pel centro, e seghi CD che non vi passa ad angoli obliqui in E. Si cali dal centro F, FG perpendicolare a CD, la quale segherà la detta CD in due parti uguali in G (1); e si unisca CE. Essendo AB divisa in due parti uguali in F, e in due parti disuguali in E; sarà il rettangolo di AE, EB, una col quadrato di EF uguale al quadrato di BF, o sia FC. Similmente il rettangolo di CE, ED, una col quadrato di EG è uguale al quadrato di CF; onde aggiuntovi il comune quadrato di GF; sarà il rettangolo di CE, ED, una coi quadrati di EG, GF, cioè col quadrato di EF uguale ai quadrati di CG, e GF, o sia al quadrato di CF. Dunque sarà il rettangolo di AE, EB insieme col quadrato di EF uguale al rettangolo di CE; ED insieme col quadrato di EF (2). Onde toltone questo comune quadrato di EF, rimarrà il rettangolo di AE, EB uguale al rettangolo di CE, ED.

IV. Finalmente niuna delle due AB, CD (*Fig. 103.*) passi pel centro F. Si tiri per E il diametro GH. Essendo per la terza parte già dimostrata, al rettangolo di GE, EH uguale, sì il rettangolo di AE, EB, che il rettangolo di CE, ED; sarà il rettangolo fatto dalle parti AE, EB uguale al rettangolo delle parti CE, ED (3). Dunque se ec. ch'è quel tanto, che b. d.

---

(1) *Prop. 2. lib. 3.*
(2) *Ass. 1.*
(3) *Assio. 1.*

PROP. XXXVI. TEOR. XXX.

Se da un punto preso fuori d' un cerchio si tirino due rette una tangente del medesimo cerchio, e l' altra secante; sarà il rettangolo fatto da tutta la secante, e dalla parte esistente fuori del cerchio uguale al quadrato della tangente.

Dal punto A (*Fig. 104.*) esistente fuori del cerchio BDHF si tirino AB tangente in B, e AC secante. Dico che il rettangolo di CA e AD è uguale al quadrato di AB.

Dim. Passi, in primo luogo, la secante AC pel centro O, e si unisca EB. Essendo DC divisa in due parti uguali in E, e ad essa aggiunta la porzione AD; sarà (1) il rettangolo di CA, AD, una col quadrato di DE uguale al quadrato di AE, e conseguentemente ai quadrati di AB, BE pel triangolo ABE rettangolo in B; onde toltine i quadrati uguali di ED, EB, rimarrà il rettangolo di CA e AD uguale al quadrato di AB.

Se poi la secante AF non passa per lo centro E. S' abbassi in tal caso sopra AF dal centro E la perpendicolare EG, la quale dividerà HF in due parti uguali in G (2), e si unisca EH. Essendo FH divisa in due parti uguali in G, e ad essa aggiunta la porzione HA; sarà il rettangolo di FA ed AH una col quadrato di AG (3), ed aggiuntovi di comune il quadrato di GE; sarà il rettangolo di FA ed AH, insieme coi quadrati di HG e GE, o sia di EH uguale alla somma de' quadrati di AG, e GE, ovvero al

(1) *Pro. 9. lib. 2.*
(2) *Pro. 2. lib. 3.*
(3) *Pro. 9. lib. 2.*

quadrato di AE, e conseguentemente ai quadrati di AB, e BE; toltine i quadrati uguali di EH, ed EB, sarà il rettangolo di FA ed AH uguali al quadrato AB. Dunque se da un ec. Ch' è ciò, che b. d.

COROLLARIO.

Essendo al quadrato di AB uguale, sì il rettangolo di CA ed AD, che il rettangolo di FA ed AH; sarà il rettangolo di CA e AD uguale al rettangolo di FA e AH. Dunque se da un punto esistente fuori d' un cerchio si tirano più secanti, i rettangoli fatti dalle intere secanti nelle rispettive porzioni esistenti fuori del cerchio sono tutti uguali.

PROP. XXXVII. TEOR. XXXI.

Se da un punto esistente fuori d' un cerchio si tireranno due rette, delle quali una giunga alla parte convessa dalla periferia, e l' altra sia secante; ed il rettangolo dell' intera secante, nella parte esistente fuori del cerchio sia uguale al quadrato di quella, che arriva alla parte convessa; sarà una tale retta tangente del cerchio.

DAl punto A (*Fig.* 105.) preso fuori del cerchio BDC si tirino le due rette AB, AC delle quali AB incontri la periferia in B, e AC sia secante; ed il rettangolo di BA e AD sia uguale al quadrato di AB. Dico, che AB è tangente in B.

Dim. Dal punto A si tiri la tangente AE (1), e s' uniscano le rette FB, FA, FE. Poichè al rettangolo di CA e AD, è uguale, sì il quadrato di

(1) *Prop.* 15. *lib.* 3.

AB, che il quadrato della tangente AE (1); sarà il quadrato di AB uguale al quadrato di AE (2) e perciò la retta AB uguale ad AE. Dunque ne' triangoli ABF, AEF essendo i due lati AB, BF uguali rispettivamente ai due lati AE, EF, e la base AF comune; sarà l' angolo ABF uguale all' angolo AEF; ma questo per la tangente AE è retto; onde retto sarà ancora l' angolo ABF. Sicchè essendo AB perpendicolare al raggio BF sarà tangente in B (3). Ch' è ciò, che b. d.

COROLLARIO.

Poichè dal punto A non si possono tirare alla parte convessa del cerchio BDE più rette uguali ad AB, AE (4); cioè tali, che i loro quadrati sieno uguali al rettangolo di CA e AD; perciò da A non si potranno tirare altre tangenti al cerchio BDE diverse dalle due AB, AE. Dunque da un punto dato fuori d' un cerchio due sole tangenti si possono tirare al medesimo, le quali sono sempre uguali.

---

(1) *Prop. prec.*
(2) *Assi. 1.*
(3) *Prop. 12. lib. 3.*
(4) *Prop. 9. lib. 3.*

DELLA

GEOMETRIA PIANA

LIBRO QUARTO.

DEFINIZIONI.

I.

Una figura rettilinea si dice *iscritta* nel cerchio, ovvero il cerchio *circoscritto* alla figura; se la figura è situata dentro del cerchio in modo, che tutt' i vertici de' suoi angoli sono nella periferia.

II.

Una figura rettilinea si dirà *circoscritta* al cerchio, o il cerchio *iscritto* alla figura, se la figura è situata intorno al cerchio in maniera, che tutt' i suoi lati sono tangenti del medesimo cerchio.

III.

Si chiama figura *ordinata*, o *regolare* ogni figura equilatera, ed equiangola.

IV.

Una retta si dice *adattata* in un cerchio, se talmente viene situata in esso, che i suoi estremi tocchino la periferia.

CAP. I.

DELLA ISCRIZIONE, E CIRCOSCRIZIONE DI QUALSIVOGLIA TRIANGOLO NEL CERCHIO, E DEL CERCHIO IN QUALSIVOGLIA TRIANGOLO.

PROP. I. PROB. I.

Dato un cerchio, ed una retta non maggiore del suo diametro, adattare in esso una retta uguale alla data.

Ris. Sieno A (*Fig. 106.*) la data retta, e BEC il cerchio dato. Si tiri nel cerchio il diametro BC, se BC sarà uguale ad A, sarà BC la retta desiderata; se poi è maggiore, se ne tagli BD, che sia uguale ad A, e descritto col centro B, ed intervallo AD l'arco DEF, che seghi la periferia in E, s'unisca EB. Dico, che EB è la retta ricercata.

Dim. Essendo il punto B centro del cerchio DEF, saranno i suoi raggi BD, BE uguali; ma per la costruzione BD è uguale ad A. Sicchè anche BE è uguale ad A. Dunque nel dato cerchio BEC s'è adattata la retta BE uguale ad A. Ch'è quel tanto, che b. f. e d.

PROP. II. PROB. II.

Iscrivere in un dato cerchio un triangolo equiangolo ad un' altro triangolo dato.

Ris. SIa FGH (*Fig.107.*) il dato cerchio, e BAC il triangolo dato. Si tiri DE, che sia tangente del cerchio GFH in F; e nel punto F della retta DE si formi, sì l' angolo DFG uguale all' angolo ACB, che l' angolo EFH uguale all' angolo ABC (1), e si unisca GH. Dico che GFH è il triangolo ricercato.

Dim. Essendo la retta DE tangente in F, e GF, FH secanti, sarà l' angolo DFG uguale all' angolo H dell' alterna porzione; e l'angolo EFH uguale all' angolo G (2); ma per la costruzione l' angolo DFG è uguale all' angolo C, e l'angolo EFH è uguale all'angolo B. Sicchè sarà l'angolo H uguale a C, e G uguale a B; e conseguentemente il terzo GFH uguale al terzo BAC. Dunque nel cerchio GFH s' è iscritto il triangolo FGH equiangolo al dato ABC. Ch' è quel tanto, che b. f., e d.

PROP. III. PROB. III.

Dato un cerchio, circoscrivere ad esso un triangolo equiangolo ad un' altro triangolo dato.

Ris. SIeno ABC (*Fig. 108.*) il cerchio, e DEF il triangolo dato. Si prolunghi la base EF del triangolo in G, ed H; e tirato nel cerchio il raggio B, si formi nel centro I l' angolo BIA uguale all' angolo DEG, e l' angolo BIC uguale all' angolo DFH, e

(1) *Pro. 8. lib. 1.*
(2) *Pro. 26. lib. 3.*

finalmente si tirino le rette LM, MN, NL tangenti ne' punti A, B, C, le quali prolungate s' uniscano in L, M, N. Dico essere LMN il triangolo ricercato.

Dim. Essendo AIBM un quadrilatero, saranno i quattro angoli in A, I, B, M insieme presi uguali a 4 retti; ma i due MAI, MBI sono retti; sicchè la somma degli altri due AMB, AIB è anche uguale a due retti; e perciò uguale alla somma de' due DEG, DEF (1); ma per la costruzione gli angoli AIB, DEG sono uguali; onde tolti questi, rimarrà AMB uguale all'angolo DEF, nello stesso modo si dimostra, che l'angolo N è uguale all' angolo DFE. Dunque essendo i due angoli M, N uguali respettivamente ai due DEF, sarà il terzo L uguale al terzo EDF. Sicchè al dato cerchio ABC s' è circoscritto il triangolo LMN equiangolo al dato DEF. Ch' è quel tanto che b. f., e d.

PROP. IV. BROBL. IV.

Dato un triangolo qualunque, iscrivere in esso un cerchio.

Ris. Sia ABC (*Fig. 109.*) il triangolo dato. Si dividano due angoli B, e C in due parti uguali colle rette BD, CD, le quali si prolunghino, finchè s' uniscano in D; e da questo punto D si abbassino le rette DE, DF, DG respettivamente perpendicolari ai lati CB, BA, AC (2). Dico, che il cerchio, si descrive col centro D, ed intervallo DE sia il ricercato.

Dim. Poichè ne' due triangoli BED, BFD, gli angoli EBD, FBD sono per la costruzione uguali, ed uguali ancora sono gli angoli retti BED, BFD, e di

(1) *Pro. 3. lib. 1.*
(2) *Pro. 9., e 11. lib. 1.*

più il lato BD comune. Dunque sarà il lato DE uguale a DF (1); nello stesso modo si dimostra essere DE uguale a DG. Sicchè il cerchio descritto col centro D, ed intervallo DE passa anche per gli punti F, e G. Laonde toccando con la sua periferia tutt' i lati del triangolo ABC è iscritto al medesimo. Ch' è quel tanto, che b. f., e d.

PROP. V. PROB. V.

Dato qualsivoglia triangolo, circoscrivere ad esso un cerchio.

Ris. Sia ABC (*Fig. 110.*) il triangolo dato. Si dividano due de' suoi lati AB, AC in due parti uguali ne' punti D, ed E; e da questi punti s' innalzino le perpendicolari DF, EF, che s' incontrino in F (3); e s' uniscano finalmente le rette FA, FB, FC. Dico, che il cerchio, che si descrive col centro F, ed intervallo FA sia il cerchio desiderato.

Dim. Essendo ne' triangoli BDF, ADF il lato BD uguale a DA, DF comune, e gli angoli BDF, ADF uguali, come retti; sarà ancora la base BF uguale ad FA (3). Similmente si dimostra, essere FA uguale a FC. Sicchè essendo le tre rette FA, FB, FC tra loro uguali; il cerchio descritto col centro F, ed intervallo FA passerà anche per gli punti B e C perciò sarà circoscritto al dato triangolo ABC. Ch' è quel tanto, che b. f., e d.

---

(1) *Pro. 8. lib. 1.*
(2) *Pro. 10. e 11. lib. 1.*
(3) *Prop. 2. lib. 1.*

AVVERTIMENTO.

Ricercandosi nelle altre figure rettilinee, per la soluzione de' problemi attenenti alle iscrizioni, e circoscrizioni, alcune condizioni, che costantemente si ritrovano nelle sole figure regolari; perciò passeremo a risolvere i suddetti problemi nelle figure regolari.

CAP. II.

DELLE ISCRIZIONI, E CIRCOSCRIZIONI DELLE FIGURE REGOLARI NEL CERCHIO, E DEL CERCHIO NELLE FIGURE REGOLARI.

PROP. VI. PROB. VI.

Dato un cerchio, iscrivere in esso un quadrato.

Ris. SIa ABCD (*Fig.* 111.) il dato cerchio. Si tirino in questo due diametri AC, BD, che s' intersechino nel centro E ad angoli retti, e s' uniscano le corde AB, BC, CD, DA. Dico, che ABCD è il quadrato ricercato.

Dim. Essendo gli angoli al centro AEB, BEC, CED, DEA uguali, perchè retti uguali saranno, anche gli archi AB, BC, CD, DA dov' essi appoggiano (1); ma archi uguali sottendono corde uguali. Sicchè le rette AB, BC, CD, DA sono uguali, e perciò la figura ABCD è equilatera; ma è ancora rettangolo, essendo i suoi angoli ABC, BCD, CDA, DAB formati ne' semicerchi, e perciò retti (2). Dunque ABCD è un quadrato. Laonde nel dato cerchio

---

(1) *Prop. 32. lib. 3.*
(2) *Prop. 25. lib. 3.*

ABCD s'è iscritto il quadrato ABCD. Ch'è ciò, che b. f., e d.

COROLLARII.

I. Se ciascuno degli archi AB, BC, CD, DA si dividerà in due è successivamente poi in 4, 8, 16, ec. parti uguali, e vi si adatteranno le respettive corde; s'avranno mediante l'iscrizione del quadrato, iscritte nel cerchio anche le figure regolari di 8, 16, 32 ec. lati.

II. Essendo il triangolo AEB rettangolo in E; sarà il quadrato di AB uguale ai quadrati AE, EB, e conseguentemente il doppio del quadrato del raggio AF. Sicchè il quadrato di AB, cioè il quadrato iscritto in un cerchio è il doppio del quadrato fatto sul raggio del medesimo cerchio.

PROP. VII. PROB. VII.

Dato un cerchio, circoscrivere intorno di esso un quadrato.

Ris. Sia ABCD (*Fig.* 111.) il cerchio dato. Si tirino in esso i diametri ACB, D, che s'intersechino in E ad angoli retti, e dai punti A, B, C, D si tirino le rette GF, FI, IH, HG respettivamente perpendicolari ai diametri AC, BD, che s'uniscano in F, I, H, G. Dico, esser FIHG il quadrato ricercato.

Dim. Essendo le rette FG, BD, IH perpendicolari ad AC, saranno tra loro parallele; similmente essendo FI, AC, GH segare ad angoli retti da BD, saranno parallele fra loro (1). Onde, siccome per gli parallelogrammi FD, DI, sono i lati FG, IH uguali

(1) *Prop.* 18. *lib.* 1.

all' opposto BD; così ancora pe' parallelogrammi AI, AH; saranno i lati FI, GH uguali ad AC (1); ma i diametri AC, BD sono uguali. Dunque uguali sono ancora i lati GF, FI, IH, HG; e perciò la figura GI è equilatera; ma è di più rettangola: poichè gli angoli F, I, H, G, per gli parallelogrammi FE, EI, EH, EG, sono uguali agli angoli retti formati nel centro E. Sicchè IG è un quadrato; ed è circoscritto per la costruzione al dato cerchio ABCD. Ch' è ciò, che b. f., e d.

AVVERTIMENTO.

Essendo l' angolo nel semicerchio ABC retto; sarà il quadrato di AC, ovvero FI uguale ai quadrati di di AB, e BC (2), e conseguentemente il doppio del quadrato di AB. Dunque il quadrato FI, cioè il quadrato circoscritto IG è il doppio del quadrato di AB, cioè del quadrato ABCD iscritto nel medesimo cerchio.

PROP. VIII. PROB. VIII.

Dato un quadrato, iscrivere in esso un cerchio.

Ris. Sia FGHI (*Fig.* 111.) il dato quadrato. Si dividano i lati GF, FI in due parti uguali nei punti A, e B, da' quali s' innalzino le respettive perpendicolari AC, BD, che s' intersechino in E (3). Dico, che il cerchio, il quale si descrive col centro E, ed intervallo EA, è il ricercato.

---

(1) *Prop.* 29. *lib.* 1.
(2) *Prop.* 12. *lib.* 2.
(3) *Prop.* 10. e 11. *lib.* 1.

Dim. Essendo IG un quadrato; saranno GA, FI uguali tra loro. Onde uguali saranno ancora le loro metà GA, AF, FB, BI, ma per gli parallelogrammi GE, EF, EI, sono GA uguale a DE, AF a BE, FB ad EA, e B uguale a CE (1). Sicchè le quattro rette ED, EA, EB, EC saranno eziandio uguali; e perciò il cerchio descritto col centro E, ed intervallo EA, passerà ancora per gli punti B, C, D. Per la qual cosa toccando colla sua periferia tutt' i lati del quadrato IG, è ad esso iscritto. Ch' è quel tanto, che b. f., e d.

PROP. IX. PROB. IX.

Dato un quadrato; circoscrivere ad esso un cerchio.

Ris. Sia ABCD (*Fig.* 111.) il quadrato dato. Si tirino in esso le due diagonali AC, BD, che s' intersechino in E. Dico, che il cerchio descritto col centro E, ed intervallo EA, è il ricercato.

Dim. Essendo nel triangolo ABC uguali i lati AB, BC, e l'angolo ABC retto; saranno gli angoli BAC, BCA semiretti. Sicchè gli angoli in A, e C sono divisi in due parti uguali colla retta AC: per la medesima ragione gli angoli B e D sono divisi in due parti uguali colla retta BD; ma gli angoli in A, B, C, D sono uguali, perchè retti. Dunque uguali sono ancora le loro metà. Laonde nel triangolo AEB, essendo uguali gli angoli EAB, EBA; uguali sono eziandio i lati AE, EB (2). Similmente si dimostra essere EC, ED, EA anche uguali. Sicchè il cerchio descritto col centro E, ed intervallo EA, passando per tutt' i

(1) *Prop. 29. lib. 1.*
(2) *Pro. 26. lib. 1.*

punti A, B, C, D, è circoscritto al dato quadrato ABCD. Ch'è ciò, che b. f., e d.

PROP. X. PROB. X.

Costruire un triangolo isoscele, che abbia ciascuno degli angoli alla base il doppio dell' angolo al vertice.

Ris. Si tiri una qualche retta AB, (*Fig.112.*) e si divide talmente in C, che il rettangolo di AB e BC sia uguale al quadrato di AC (1); indi col centro A, ed intervallo AB descritto il cerchio FBDE, s'adatti in esso la retta BD uguale a CA (2), e si unisca AD. Dico, che ABD è il triangolo ricercato.

Dim. Si tiri da C a D la retta CD, e si circoscriva al triangolo ACD il cerchio ACD (3). Il rettangolo di AB a BC è uguale al quadrato di CA; ma CA è uguale e BD; onde sarà il detto rettangolo uguale ancora al quadrato di BD; e perciò la retta BD, che arriva alla parte convessa del cerchio ACD, è tangente del medesimo nel punto D (4). Dunque l'angolo BDC è uguale all'angolo CAD fatto nell' alterna porzione (5), e aggiuntovi di comune l'angolo CDA; sarà tutto l'angolo BDA, e conseguentemente ancora l'angolo DBA uguale ai due CAD, CDA; ma nel triangolo DAC, essendo il lato AC prolungato in B, l'angolo esterno BCD è anche uguale ai due

(1) *Prop.* 26. *lib.* 2.
(2) *Prop.* 1. *lib.* 4.
(3) *Prop.* 5. *lib.* 4.
(4) *Prop.* 27. *lib.* 3.
(5) *Prop.* 26. *lib.* 3.

CAD, CDA (1). Sicchè gli angoli DBC, DCB saranno fra loro uguali (2) onde uguali saranno ancora i lati DB, DC (3); ma DB è uguale a CA. Dunque eziandio DC è uguale a CA; e perciò essendo il triangolo ACD isoscele, uguali saranno gli angoli CAD, CDA; ma s'è dimostrato sì l'angolo BDA, che l'angolo DBA uguale ai due CAD, CDA. Laonde, sì l'uno, come l'altro è il doppio del solo angolo in A. Per la qual cosa s'è formato il triangolo isoscele ABD, che ha ciascuno degli angoli alla base ABD, ADB il doppio dell'angolo al vertice A. Ch'è ciò, che b. f., e d.

COROLLARII.

I. Poichè i tre angoli di qualsivoglia triangolo sono uguali a due retti; e nel triangolo ABD, sì l'angolo ABD, che ADB è il doppio dell' angolo A. È chiaro, che se due retti si divideranno in 5 parti uguali, sarà tanto l'angolo ABD, quanto l'angolo ADB $^2/_5$ di due retti, e l'angolo BAD $^1/_5$ di due retti, ovvero $^1/_{10}$ di quattro retti. Sicchè l'arco BD sarà $^1/_{10}$ della sua periferia; onde la corda BD, e conseguentemente CA sarà il lato del decagono regolare iscrittibile nel cerchio, che ha per raggio AB. Dunque se il raggio d'un dato cerchio si divide talmente in un punto, che il rettangolo dell'intero raggio, e d'una sua parte sia uguale al quadrato dell'altra parte; quest'altra parte sarà il lato del decagono regolare iscrittibile in esso.

II. Se il raggio AB si prolunga in modo verso H, che il rettangolo di BH e HA sia uguale al qua-

---

(1) *Prop.* 23. *lib.* 1.
(2) *Ass.* 1.
(3) *Prop.* 26. *lib.* 1.

drato di BA; sarà AH uguale a CA (1); ma CA è il lato del decagono. Dunque eziandio AH è il lato del decagono regolare iscrittibile nel cerchio, che ha per raggio AB. Sicchè se il raggio del cerchio si prolunga in modo, che il rettangolo di tutto il raggio prolungato, e della parte aggiunta sia uguale al quadrato dello stesso raggio; sarà un tale prolungamento anche il lato del decagono regolare in esso iscrittibile.

AVVERTIMENTI.

I. Nella costruzione di questo problema s'è preso ad arbitrio il lato AB. Dunque, dato uno de' lati uguali AB, AD si può con facilità formare un triangolo isoscele, che abbia ciascuno degli angoli alla base il doppio dell' angolo al vertice. Ma volendosi, data la base BD; formare sulla medesima un tale triangolo isoscele; si dovrà prima con DB, che sia uno de' due lati uguali formare il triangolo isoscele DBC della già esposta natura; di poi nel punto D della retta BD si formi l'angolo BDA uguale all'angolo DBC; e si prolunghi BC, finchè s'incontri con DA nel punto A; sarà BAD il ricercato triangolo: in fatti essendo, sì l'angolo DBA, che l'angolo BDA $2/5$ di 2 retti; sarà BDA $1/5$. Sicchè il triangolo ABD, formato sulla data retta BD, ha ciascuno degli angoli alla base il doppio dell'angolo al vertice.

II. Da questo precedente avvertimento si ricava la maniera di dividere l'angolo retto ABC (*Fig. 113.*) in 5 parti uguali. Sopra la retta BC si formi il triangolo isoscele BDC, che abbia ciascuno degli angoli alla base BC il doppio dell'angolo al vertice D. Essendo ABC retto, e DBC $2/5$ di due retti, cioè $2/5$

---

(1) *Prop. 17. lib. 2.*

d'un retto, sarà ABD 1/5 di retto. Laonde se l'angolo DBC si divide in 4 parti uguali; è chiaro, che ciascuno degli angoli ABD, DBE, EFB, FBG, GBC è 1/5 di retto; e conseguentemente l'angolo retto ABC sarà diviso in 5 parti uguali.

PROP. XI. PROB. XI.

Dato un cerchio, iscrivere in esso un pentagono regolare.

Ris. Sia ABCDE (*Fig. 114.*) il dato cerchio. Si formi il triangolo isoscele GFH, che abbia ciascuno degli angoli alla base il doppio dell'angolo al vertice (1); ed iscritto nel cerchio ABCDE il triangolo ACD equiangolo al triangolo GFH (2); si dividano gli angoli alla base ACD, ADC in due parti uguali colle rette CE, DB (3), e si tirino le corde AB, BC, CD, DE, EA. Dico, che ABCDE è il pentangono ricercato.

Dim. Essendo il triangolo ACD equiangolo al triangolo GFH, avrà ciascuno degli angoli alla base ACD, ADC il doppio dell'angolo CAD; ma sono i medesimi angoli ACD, ADC divisi in due parti uguali colle rette CE, DB. Sicchè i cinque angoli alla periferia DAC, ACE, ECD, CDB, BDA saranno tra loro uguali; e perciò uguali saranno ancora gli archi ne' quali appoggiano (4); ma archi uguali sottendono corde uguali (5). Dunque essendo uguali le

(1) *Pro. preced.*
(2) *Pro. 2. lib. 4.*
(3) *Pro. 9. lib. 1.*
(4) *Pro. 3o. lib. 3.*
(5) *Prop. 33. lib. 3.*

cinque corde AB, BC, CD, DE, EA; sarà il pentagono ABCDE equilatero. In oltre, essendo l'arco AE uguale all'arco BC, aggiuntovi di comune l'arco GDE, sarà tutto l'arco AEDC uguale a tutto l'arco EDCB; ma gli angoli, che appoggiano ad archi uguali sono tra loro uguali. Laonde l'angolo CBA è uguale all'angolo BAE. Similmente si dimostra, essere eziandio uguali gli angoli BCD, CDE, DEA. Dunque il pentagono ABCDE, iscritto nel dato cerchio, è equilatero, ed equiangolo. Ch'è ciò, che b. f., e d.

AVVERTIMENTI.

I. Se ciascuno de' cinque archi AB, BC, CD, DE, EA si dividerà in due, e poi successivamente in 4, 8 ec. parti uguali, e si tireranno le respettive corde, s'avranno iscritte nel cerchio le figure regolari di 10, 20, 40 ec. lati. Dunque coll'iscrizione del pentagono regolare, si possono avere ancora le iscrizioni delle figure regolari di 10, 20, 40, ec. lati

II. Ancorchè la maniera d'iscrivere il pentagono insegnata da Euclide sia molto ingegnosa; nulladimeno però è molto più comoda per la pratica quella, che ne dà Tolomeo nel libro 1. del suo Almagesto; che perciò la soggiugniamo nel seguente Problema.

Lemma.

Il quadrato fatto sul lato del Pentagono regolare è uguale alla somma de' quadrati del raggio, e del lato del decagono regolare.

Dim. Sia ABCDEF (*Fig.* 115.) un mezzo decagono regolare. È chiaro, che CA è un lato del pentagono regolare, e che gli archi AB, BC, CD, DE,

EF sono fra loro uguali. Onde divisi gli archi AB, DE in due parti uguali ne' punti O, ed I, e tirati i raggi OG, CG, IG: sarà l' angolo CGO uguale all' angolo CGI (1); ma tanto l' angolo CGI, quanto l' angolo alla periferia CAG è la metà dell' angolo al centro CGF (2). La onde sarà l' angolo CGI, e conseguentemente CGO, uguale all' angolo GAC. Sicchè la retta CG, che arriva alla parte convessa del cerchio GLA, formando con la corda GL l' angolo CGL uguale all' angolo GAL della porzione alterna; sarà taugente del detto cerchio nel punto G (3); e perciò sarà il quadrato di CG uguale al rettangolo della secante AC nella parte CL (4). In oltre essendo AB, e BC tra loro uguali, uguali saranno gli angoli BAC, BCA; ma pe' triangoli OAL, OBL, è l' angolo BAL uguale all' angolo ABL. Dunque sarà l' angolo ABL, formato della retta AB, che incontra la parte convessa del cerchio BLC, e dalla corde BL, uguale all' angolo dell' alterna porzione BCL; e perciò AB è tangente del cerchio BLC (5); onde il suo quadrato è uguale al rettangolo di CA e AL. Sicchè i due quadrati di CG, BA sono uguali ai due rettangoli di AC, CL, e di AC, AL, e conseguentemente al quadrato dell' intera CA (6). Dunque il quadrato di AC, lato del pentagono regolare, è uguale alla somma de' quadrati del raggio CG, e del lato del decagono regolare AB. Ch' è ciò, che b. d.

---

(1) *Pro. 33. lib. 3.*
(2) *Pro. 22. lib. 3.*
(3) *Prop. 27. lib. 3.*
(4) *Prop. 36. lib. 3.*
(5) *Prop. 27. lib. 3.*
(6) *Prop. 4. lib. 2.*

PROBLEMA.

Dato un cerchio, iscrivere in esso un pentagono regolare.

Ris. Sia AEB (*Fig. 116.*) il dato cerchio. Si tiri il diametro AB; e alzata dal centro D la perpendicolare DE, si divida DB in due parti uguali in C, e s' unisca CE; finalmente descritto col centro C, ed intervallo CE l' arco EF, si tiri la corda EF. Dico, che EF è il lato del pentagono ricercato.

Dim. Essendo BD divisa in due parti uguali in C, e ad essa aggiunta a dirittura DF; sarà il rettangolo di BF e FD, insieme col quadrato di DC, uguale al quadrato di FC (1), ovvero CE, e conseguentemente, per l' angolo EDC retto, uguale ai quadrati di ED, DC; onde toltone il comune quadrato di DC, sarà il rettangolo del raggio prolungato BF, o della parte FD, uguale al quadrato di ED, o sia DB; e perciò sarà FD il lato del decagono regolare iscrittibile nel cerchio AEB (2). In oltre, essendo il triangolo EDF rettangolo in D; sarà il quadrato di EF uguale alla somma de' quadrati del raggio ED, e di FD lato del decagono. Dunque EF è il lato del pentagono regolare (3). Per la qual cosa adattando EF intorno intorno al cerchio AEB, s' avrà il pentagono regolare ad esso iscritto. Ch' è ciò, che b. f., e d.

(1) *Prop. 9. lib. 2.*
(2) *Cor. 1. prop. 10. lib. 4.*
(3) *Lem. preced.*

Dato un cerchio, circoscrivere ad esso un pentagono ordinato.

Ris. Sia ABCDE (*Fig. 117.*) il cerchio dato. S' iscriva in esso prima un pentagono regolare e sia ABCDE (1); di poi per gli punti A, B, C, D, E si tirino le tangenti LF, FG, GH, HI, IL, che s' uniscano in F, G, H, I, L. Dico, che FGHIL è il pentagono ricercato.

Dim. Dal centro O si tirino agli angoli, sì del pentagono iscritto, che circoscritto le rette OL, OA, OF, OB ec. Essendo ne' triangoli OAF, OBF, il lato OA uguale ad OB; di più AF uguale a BF, come tangenti tirate dal medesimo punto F (2), e la base FO comune; sarà tanto l' angolo AFO uguale all' angolo BFO, quanto l' angolo AOF uguale all'angolo BOF (3). Sicchè la retta OF ha diviso, sì l' angolo AOB al centro, che l' angolo AFB in due parti uguali. Nello stesso modo si dimostra, che le rette OL, OI, OH, OG dividono in due parti uguali, tanto gli angoli rispettivi al centro O, quanto gli angoli in L, I, H, G. In oltre, essendo, pel pentagono iscritto, uguali gli archi AB, BC; uguali saranno ancora gli angoli AOB, BOC (4); e conseguentemente le loro metà FOB, GOB. Dunque ne' triangoli FBO, GBO, essendo uguali, e sì gli angoli FOB, GOB, che i retti OBF, OBG, ed il lato BO comune; sarà l' angolo BFO uguale all' angolo

(1) *Prop. preced.*
(2) *Cor. pro. 37. lib. 3.*
(3) *Prop. 1. lib. 1.*
(4) *Pro. 32. lib. 3.*

BGO, ed il lato FB uguale a BG (1); e per la medesima ragione sarà FA uguale ad AL; ma FB è uguale ad FA. Laonde tutta FG è uguale a tutta FL; similmente si dimostra essere uguali LI, IH, HG. Dunque il pentagono FGHIL è equilatero. Finalmente essendosi dimostrati uguali gli angoli BFO, BGO; uguali saranno ancora i loro doppj BFA, BGC; e poichè per la stessa ragione uguali sono ancora gli angoli in L, H, G: sarà il pentagono FGHIE eziandio equiangolo. Sicchè s'è al dato cerchio circoscritto il pentagono regolare FGHIL. Ch' è ciò, che b. f., e d.

PROP. XIII. PROB. XIII.

Dato un pentagono regolare; iscrivere in esso un cerchio.

Ris. SIa FGHIL (*Fig.* 117.) il pentagono dato. Si dividano due angoli qualunque LFG FGH in due parti uguali colle rette FO, GO, le quali si prolunghino, finchè s'incontrino in O, e da questo punto s'abbassi su FG la perpendicolare OB (2). Dico che il cerchio descritto col centro O, ed intervallo OB è il ricercato.

Dim. Da O s'abbassino agli altri lati del pentagono le respettive perpendicolari OA, OE, OD, OC, e si tirino le rette OL, OI, OH. Essendo nei triangoli LFO, GFO il lato LF uguale a GF; FO comune, e l'angolo LFO uguale all'angolo GFO; sarà ancora l'angolo FLO uguale all'angolo FGO (3): ma FGO è metà di FGH. Dunque FLO è anche metà FLI. Nello stesso modo si dimostra, che OI, ed OH

(1) *Prop.* 3. *lib.* 1.
(2) *Prop.* 9. *e* 11. *lib.* 1.
(3) *Prop.* 2. *lib.* 1.

dividono per metà gli angoli LIH, IHG. Ciò posto, essendo ne' triangoli OAF, OBF, uguali, sì gli angoli AFO, BFO, che gli angoli FAO, FBO, come retti, ed il lato FO comune; sarà AO uguale a BO (1). Similmente si dimostra, essere eziandio uguali AO, OE, OD, OC. Dunque il cerchio descritto col centro O, ed intervallo OB, passa colla sua periferia anche per gli punti A, E, D, C. Laonde toccando tutt'i lati del pentagono FGHIL, è iscritto al medesimo. Ch' è ciò, che b. f., e d.

PROP. XIV. PROB. XIV.

Dato un pentagono ordinato, circoscrivere ad esso un cerchio.

Ris. Sia ABCDE (*Fig.* 117.) il dato pentagono. Si dividano due angoli EAB, ABC in due parti uguali colle rette AO, BO, che prolungate s'uniscano in O. Dico, che il cerchio descritto col centro O, ed intervallo OA sia il ricercato.

Dim. Dal punto O si tirino agli altri angoli in E, D, C le rette OE, OD, OC; queste, siccome nella precedente s'è dimostrato, divideranno i suddetti angoli E, D, C in due parti uguali; onde essendo uguali gl' interi angoli del pentagono; uguali parimenti saranno le loro metà; e perciò nel triangolo AOB essendo uguali gli angoli OAB, OBA; uguali saranno ancora i lati OA, OB (2). Nello stesso modo si dimostra, essere eziandio uguali le rette OA, OE, OD, OC. Sicchè il cerchio descritto col centro O, ed intervallo OA passa colla sua periferia anche per gli punti E, D, C, B; cioè passa pe' vertici di tutti

(1) *Prop.* 3. *lib.* 1.
(2) *Prop.* 26. *lib.* 1.

gli angoli del pentagono ABCDE; e perciò è circoscritto ad esso. Ch'è ciò, che b. f., e d.

PROP. XV. PROB. XV.

Dato un cerchio, iscrivere in esso un esagono regolare.

Ris. Sia ACE (*Fig.* 118.) il cerchio dato. Si tiri il diametro AD; e col centro D, ed intervallo DG si descriva un'altro cerchio CEG, che seghi il primo ne' punti C, ed E, da' quali si tirino al centro G le rette CG, EG, e si prolunghino in F, e B. S'uniscano finalmente i sei punti A, B, C, D, E, F colle corde AB, BC, CD, DE, EF, FA. Dico, che ABCDEF è l'esagono ricercato.

Dim. Essendo G centro del cerchio ABD, sarà a GD uguale, sì GE, che GC; ed essendo D centro del cerchio CEG, sarà alla medesima DG, uguale, tanto CD, quanto DE. Onde i triangoli CGD, DGE sono equilateri, e conseguentemente equiangoli; e perciò, tanto l'angolo CGD, quanto l'angolo DGE è un terzo di due retti; ma gli angoli CGE, CGB sono uguali a due retti (1). Sicchè anche l'angolo CGB è un terzo di due retti; per la qual cosa uguali saranno i tre angoli BGC, CGD, DGE; ma ad essi sono eguali i respettivi verticali EGF, FGA, AGB (2). Dunque uguali essendo i sei angoli al centro G; uguali saranno i sei archi CB, BA, AF, FE, ED, DC (3); e perciò uguali ancora le rette CB, BA, AF, FE, ED, DC (4). Sicchè l'Esagono è equilatero. In oltre,

---

(1) *Prop. 13. lib. 1.*
(2) *Prop. 15. lib. 1.*
(3) *Prop. 32. lib. 3.*
(4) *Prop. 33. lib. 3.*

essendo gli archi AB, CD tra loro uguali, aggiuntovi di comune AFED, uguali eziandio saranno gli archi BAFED; AFEDC, conseguentemente gli angoli CBA, che ad essi appoggiano. Similmente si dimostra, essere uguali gli altri angoli in A, F, E, D. Dunque l'esagono iscritto nel cerchio ABCDEF è regolare. Ch'è ciò, che b. f., e d.

COROLLARII.

I. Sicchè il lato dell'esagono regolare iscrittibile in un cerchio è uguale al raggio del medesimo cerchio, e perciò si potrà con facilità iscrivere in un cerchio, o adattando in esso intorno intorno il suo raggio; ovvero con tirare prima il diametro AB, (*Fig.* 119) e descrivere coi centri A, e B, e cogl' intervalli AC, BC gli archi circolari FCL, ECD, ed unire poscia le rette AF, FE, EB, BD, DL, LA.

II. In oltre, se col centro B, ed intervallo BC si descrive il solo arco ECD, e s'uniscono i tre punti A, E, D colle rette AE, ED, DA; è chiaro, che s'avrà nel cerchio iscritto facilissimamente il triangolo equilatero AED; sul quale sono da notarsi due cose.

La prima, che il quadrato del suo lato AE è il triplo del quadrato del raggio BC. Imperocchè essendo, per l'angolo retto AEB (1), i quadrati di AE, EB uguali al quadrato del diametro AB (2), e conseguentemente uguali al quadruplo del quadrato del raggio BC, togliendone i quadrati uguali di EB, e BC; rimarrà il quadrato di AF uguale al triplo del quadrato di BC.

La seconda, che il lato ED taglia dal diametro

(1) *Prop.* 25. *lib.* 3.
(2) *Prop.* 12. *lib.* 2.

AE ad esso perpendicolare, la quarta parte BO. In fatti, essendo ne' triangoli CEO, BEO, i lati CE, EO uguali ai lati BE, EO, ed ugualí parimente gli angoli GEO, BEO, che appoggiano su gli archi uguali LD, DB; sarà la base BO uguale ad OC (1). Onde BO è la metà di BC, ovvero la quarta parte del diametro AB.

III. Se ciascuno de' sei archi AF, FE, EB, ec. si dividerà in 2., e successivamente poi in 4, 8, 16, 32, ec. parti uguali, e si tireranno le rispettive corde; s'avranno, colla iscrizione dell'esagono, iscritto nel cerchio anche le figure regolari di 12, 24, 48, ec. lati.

PROP. XVI. PROB. XVI.

Dato un cerchio, iscrivere in esso un quindecagono regolare.

Ris. S'Adattino nel cerchio dato ABDE, la retta AD, (*Fig.* 120.) che sia lato del pentgaono ordinato, e la retta AD, che sia lato del triangolo equilatero, iscrittibili amendue nel cerchio ABDE; e diviso il rimanente arco BD in due parti uguali in C (2), si tiri la corda CD. Dico, essere CD il lato del quindecagono ricercato.

Dim. Essendo AD lato del pentagono, e AD del triangolo equilatero; sarà l'arco ACD la quinta, e l'arco AD la terza parte dell'intera periferia; e perciò de' quindeci lati del quindecagono, dovendone contenere l'arco ACD cinque, e l'arco AB tre: ne conterrà l'arco BD due. Onde la corda CD è il lato del

(1) *Pro.* 2. *lib.* 3.
(2) *Pro.* 34. *lib.* 3.

quindecagono ; la qual cosa adattandola intorno nel cerchio ABDE, s'avrà il quindecagono regolare iscritto nel medesimo. Ch'è ciò, che b. f., e d.

AVVERTIMENTI.

Non si sono quì soggiunte le circoscrizioni dell'esagono, e del quindecagono al cerchio; perchè si eseguiscono nella medesima maniera del pentagono, cioè coll'unione delle tangenti tirate dai vertici delle figure iscritte; a qual proposito è da notarsi, che quelle figure regolari si possono circoscrivere al cerchio, che sono iscrittibili nel medesimo colla Geometria elementare, le quali si riducono alle seguenti.

Il triangolo equilatero, l'esagono, e le figure di 4, 12, 24, 48, ec. lati.

Il quadrato, e le figure di 8, 16, 32, 64, ec. lati.

Il pentagono, e le figure di 10, 20, 40, 80, ec. lati.

Il quindecagono, e le figure di 30, 60, 120, 240, ec. lati.

II. Per quello poi, che riguarda l'iscrizione, e circoscrizione del cerchio intorno l'esagono, e quindecagono; l'esecuzione n'è facilissima, sì in queste, come in qualunque altra figura regolare; non ricercandosi altro per tali operazioni, che dividere due angoli della data figura in due parti uguali, come sufficientemente s'è veduto nel quadrato, e nel pentagono.

PROP. XVII. PROB. XVII.

Dato il solo raggio d' un cerchio, determinare i lati delle figure regolari iscrittibili in esso di 3, 4, 5, 6, e 10 lati.

Ris. Sia AB (*Fig.* 1 1.) il raggio dato. S' innalzi da B la retta BC, perpendicolare, ed uguale a BA (1), e s' unisca AC, indi alzata da C, CD, che sia perpendicolare ad AC, ed uguale al raggio AB, s' unisca AD; finalmente si divida AB in modo in E, che il rettangolo di BA e AE sia uguale al quadrato di BE, e s' unisca EC; ovvero si prolunghi AB talmente in F, che il rettangolo di AF e FB sia uguale al quadrato di AB, e s' unisca CF. Dico, che AB è il lato dell' esagono, AC del quadrato, AD del triangolo equilatero, EB, o BF del decagono, e CE, o CF del pentagono.

Dim. Poichè il lato dell' esagono è uguale al raggio, sarà AB un tale lato. Essendo poi nel triangolo ABC rettangolo in B, il quadrato di AC uguale ai quadrati di AB, BC (2); sarà il suddetto quadrato di AC doppio del solo quadrato del raggio AB; e perciò AC è il lato del quadrato (3). In oltre, essendo pel triangolo ACD rettangolo in C, il quadrato di AD uguale ai quadrati di AC, CD, ovvero AB, BC, CD, cioè uguale al triplo quadrato del raggio AB; sarà AD il lato del triangolo equilatero (4). Di più, il rettangolo di BA, AE è uguale al quadrato di

(1) *Pro.* 11. *lib.* 1.
(2) *Pro.* 12. *lib.* 3.
(3) *Cor.* 2. *prop.* 6. *lib.* 4.
(4) *Cor.* 2. *pro.* 15. *lib.* 4.

EB ; ed il rettangolo di AF , FB è uguale al quadrato di AB. Sicchè tanto EB , quanto BF sarà il lato del decagono (1). Finalmente ; per gli triangoli rettangoli CBE , CBF , sono il quadrato di CE uguale ai quadrati di CB , BF ; ed il quadrato di CF uguale ai quadrati di CB , BF ; ed il quadrato di CF uguale ai quadrati di CB, BF. Dunque sì CE , che CF sarà il lato del pentagono. Ch' è ciò che b. d.

(1) *Cor. 1., e 2. prop. 10. lib. 4.*

DELLA

GEOMETRIA PIANA

LIBRO QUINTO.

DEFINIZIONI.

I.

DUe quantità, o vero grandezze diconsi *Omogenee*, cioè della stessa natura, quante volte, sono uguali, o possono divenir tali coll' aumentare la piccola o diminuire la grande. Si dicono per lo contrario *Eterogenee*, cioè di differente natura, se aumentando per quanto si vuole la piccola, e diminuendo la grande, giammai possono divenire uguali.

Così Omogenee sono tra loro linea con linea, superficie con superficie; ma però Eterogenee, linea con superficie, superficie con corpo ec.

II.

Se due quantità omogenee disuguali si paragonano insieme, la minore si dirà *parte* della maggiore, e la maggiore tutto, o *moltiplice* della minore; questa minore, se misurerà esattamente la maggiore, si dirà sua *parte aliquota*, e la maggiore *moltiplice aliquota* della minore; ma se per l' opposto la minore non misurerà esattamente la maggiore, si chiamerà la minore *parte aliquanta*, e la maggiore *moltiplice aliquanto.*

Così, per esempio, 4 è parte aliquota di 12, e 12 moltiplice aliquoto di 4; ma 3 è parte aliquota di 10, e 10 moltiplice aliquoto di 3.

III.

Una grandezza minore, ch' esattamente misura due, o più grandezze maggiori, si dirà loro *parte aliquota comune*; come sarebbe una linea di due palmi per rapporto alle linee di 10, 12, e 16 palmi. All' incontro una grandezza maggiore, che esattamente misurata viene da più grandezze minori, dicesi *moltiplice aliquoto comune* di tutte le minori, come sarebbe una linea di 16 palmi per rispetto a quelle di 2, 4, e 8 palmi.

IV.

Due grandezze omogenee si dicono *commensurabili*, se hanno un' aliquota comune finita, cioè che misura esattamente l' una, e l' altra un determinato numero di volte.

Così le linee di 12, e 6 palmi sono grandezze commensurabili, perchè possono avere per aliquota comune il 2 che misura esattamente 6 volte il 12 e 3 volte il 6; il 3, che misura 4 volte il 12, e 2 volte il 6; il 6, che misura 2 volte il 12, ed una volta se stesso.

Si dicono poi *incommessurabili*, se non hanno un' aliquota comune finita, cioè una grandezza finita, che misuri esattamente l' una, e l' altra.

Di tal natura sono, a cagion l'esempio il lato del quadrato, e la sua diagonale; verità così celebre presso gli Antichi, che Platone asseriva, essere più tosto bruto, che uomo, chiunque l' ignorava. In fatti essendo, pel triangolo rettangolo DAB, il quadrato di DB (*Fig.* 53.) *uguale ai quadrati di DA, AB* (1); *sarà il medesimo quadrato di DB il doppio del solo quadrato di DA.*

---

(1) *Prop.* 12. *lib.* 2.

Onde se il quadrato di DB sarà di 2 palmi quadrati, il quadrato di DA sarà d' un solo palmo quadrato; e perciò la diagonale DB sarà al lato DA, come la radice quadrata del 2 ad 1; ma la radice quadrata del 2 non può esprimersi con numero alcuno, nè intero, nè rotto. Dunque la diagonale DB, e'l lato DA, non potendo avere un'aliquota comune, saranno incommensurabili.

AVVERTIMENTO.

Sebbene due quantità incommensurabili non possono avere un' aliquota comune finita; nulladimeno però, potendosi ogni quantità colla mente dividere, e suddividere all' infinito potranno avere un' aliquota comune infinitamente piccola; cioè minore d' ogni quantità assignabile.

V.

Se due grandezze minori misurano esattamente, e ugual numero di volte due altre maggiori, si diranno le minori *parti aliquote simili* delle maggiori, e queste si chiameranno *moltiplici simili*, ovvero *egualmente moltiplici* delle minori.

Così le rette di 4, e 3 palmi sono aliquote simili delle rette di 8, e 6 palmi; e queste moltiplici simili di quelle.

VI.

La *Ragione Geometrica* è il paragone di due grandezze omogenee fatto circa la loro quantità, osservando quante volte l' una contiene l'altra. Le grandezze che si paragonano chiamansi *termini* della ragione; ed in particolare la prima *antecedente*, e la seconda *conseguente*.

VII.

Per *Esponente*, *Quantità*, o *Dominatore* della

ragione s' intende quel numero, che indica quante volte l' antecedente contiene il conseguente. Questo numero, come chiaramente si vede, è il quoziente, che si ha con dividere l' antecedente pel conseguente.

Così della ragione di 12 a 4, la quantità è $^{12}/_{4}$ cioè 3, e della ragione di 4 a 12 la quantità è $^{4}/_{12}$ o sia $^{1}/_{3}$.

COROLLARIO.

È chiaro dunque, che si può avere esatta ragione soltanto tra le grandezze commensurabili, ma non già tra le incommensurabili; e perciò le prime chiamansi ancora *razionali*, e le seconde *irrazionali*.

VIII.

Una ragione si dice *d' uguaglianza*, se l' antecedente è uguale al conseguente; dicesi poi di maggiore *disuguaglianza*, se l' antecedente è maggiore del conseguente; e finalmente di minore *disuguaglianza*, se l' antecedente è minore del conseguente.

IX.

Due ragioni diconsi *uguali*, se hanno quantità, o esponenti uguali. Si dicono poi *disuguali*, cioè una maggiore, o minore dell' altra, se la quantità dell'una è maggiore, o minore della quantità dell'altra.

Così le ragioni 4 a 2, e di 6 a 3 sono uguali; perchè le loro quantità $^{4}/_{2}$, cioè 2, e $^{6}/_{3}$, o sia 2 sono uguali; ma la ragione di 6 a 2 è maggiore della ragione di 8 a 4; perchè la quantità della prima $^{6}/_{2}$, cioè 3 è maggiore della quantità della seconda $^{8}/_{4}$, ch' equivale a 2.

X.

Una ragione si dice *reciproca*, o *diversa* d' un' altra, quantevolte le loro quantità sono opposte.

Così essendo delle due ragioni di 8 a 4, e di 3 a 6, la quantità della prima $^{8}/_{4}$, cioè 2, e la

quantità della seconda $^3/_6$, *cioè* $^1/_2$; *perchè i numeri* 2 , *e* $^1/_2$ *sono tra loro opposti ; perciò si dirà la ragione di* 8 *a* 4 *reciproca di quella di* 3 *a* 6. *Dal che si vede con chiarezza , che se due ragioni sono uguali , come di* 8 *a* 4 , *e di* 6 *a* 3 , *anche le loro reciproche di* 4 *a* 8 *e di* 3 *a* 6 *esser debbono uguali : in fatti le quantità di tali ragioni , cioè* $^1/_2$ *ed un* $^1/_2$ *sono uguali.*

XI.

Una ragione si dice *composta* da due , o più ragioni , se la sua quantità è il prodotto , che si ha con moltiplicare insieme la quantità di quelle altre ragioni.

Così , essendo delle ragioni di 6 *a* 3 , *e* 8 *a* 2 *le quantità* 2 , *e* 4 ; *ogni ragione , che avrà per quantità il prodotto di* 2 *per* 4 , *cioè* 8 ; *come* 8 *a* 1 , 16 *a* 2 , *ec. si dirà composta dalle ragioni di* 6 *a* 3 , *e di* 8 *a* 2. *E poichè moltiplicando insieme gli antecedenti* 6 *e* 8 , *ed i conseguenti* 3 *e* 2 , *la quantità della ragione di* 48 *a* 6 *è anche* 8, *cioè il prodotto delle quantità* 1 , *e* 4 ; *perciò si potrà anche avere la ragione composta da più altre ragioni , con moltiplicare insieme tutti gli antecedenti , e tutt' i conseguenti.*

COROLLARII.

I. Dunque se saranno due ragioni composte, tali però , che le componenti della prima sieno respettivamente uguali alle componenti della seconda , eziandio le composte saranno uguali. Così , essendo le ragioni di 4 a 2 , e 12 a 3 uguali respettivamente alle ragioni di 6 a 3 , e di 4 ad 1 ; sarà la composta delle due prime , cioè 48 a 6 , anche uguale alla composta delle due seconde , cioè di 24 a 3.

II. Dalla medesima natura della ragion composta si ricava ancora chiaramente, che in qualunque serie di più grandezze omogenee, la ragione della prima all' ultima è sempre composta dalle ragioni della prima alla seconda, della seconda alla terza, e così successivamente sino a quella della penultima all' ultima. Per esempio, nelle quantità omogenee 48, 12, 6, a 2; la ragione di 48 a 2 è composta dalle ragioni di 48 a 12, di 12 a 6, e di 6 a 2; in fatti la quantità della ragione di 48 a 2 è 24, ch'è appunto il prodotto delle quantità delle ragioni di 48 a 12, di 12 a 6, e di 6 a 2 cioè di 4, 2, e 3 multiplicati fra loro.

XII.

Se una ragione vien composta da 2, 3, 4, ec. ragioni uguali, si dirà *duplicata*, *triplicata*, *quadruplicata ec.* di ciascuna delle sue componenti. Onde sarà una ragione duplicata, o triplicata ec. d' un' altra data ragione, se la sua quantità sarà il quadrato, o il cubo, ec. della quantità della data ragione. E poichè in qualunque data ragione, facendo il quadrato, o il cubo, sì dell' antecedente, che del conseguente, la quantità della ragione, che ne risulta è anche il quadrato; o il cubo della quantità della data; perciò s' avrà d' una data ragione la sua duplicata, triplicata, ec., facendo il quadrato, o il cubo. ec., sì dell' antecedente, che del conseguente.

COROLLARIO.

I. Sicchè facilmente si comprende, che se due ragioni semplici sono uguali, uguali eziandio esser debbano le loro duplicate, triplicate, ec., e per l'opposto, essendo uguali le duplicate, triplicate, ec., uguali anche debbano essere le semplici.

II. In oltre, se si avranno tre quantità omoge-

ne, e la ragione della prima alla seconda sia uguale alla ragione della seconda alla terza; perchè la ragione della prima alla terza è composta da quelle due ragioni uguali, perciò sarà duplicata di ciascuna di esse. Se poi le quantità omogenee fossero quattro, e la ragione della prima alla seconda sia eguale, sì alla ragione della seconda alla terza, che alla ragione della terza alla quarta; essendo in tal caso la ragione della prima alla quarta composta da queste tre ragioni uguali, sarà triplicata di ciascuna di esse, e così in avanti.

XIII.

La porzione Geometrica è l'uguaglianza di due ragioni.

Così essendo uguali le due ragioni di 6 *a* 3, *e di* 8 *a* 4, *le medesime formano una proporzione, che si proferisce in questo modo*, 6 *sta a* 3, *come* 8 *a* 4; *e si scrive* $6 : 3 = 8 : 4$, *ovvero* $6 : 3 :: 8 : 4$.

Le quattro grandezze, che formino la proporzione diconsi *termini*, o *grandezze proporzionali*, e tanto i due antecedenti 6, e 8, quanto i due conseguenti 3, e 4, vengono detti *termini*, o *grandezze omologhe*, cioè simili nella proporzione.

XIV.

Se una proporzione Geometrica è composta da quattro termini tutti diversi, vien chiamata *discreta*. Tale appunto era la precedente $6 : 3 = 8 : 4$. Si dice poi *continua* se vien composta da tre soli termini, e quello di mezzo, chiamato comunemente *mezzo proporzionale*, fa le veci di conseguente nella prima ragione, e di antecedente nell'altra, come in questo esempio $8 : 4 = 4 : 1$.

AVVERTIMENTO.

I Teoremi di questo libro, attenenti alla ragione, e proporzione geometrica, convengono a tutte le

specie della quantità; e perciò le linee, delle quali qui ci serviremo, non rappresenteranno pure lunghezze, ma qualsivoglia possibile quantità.

CAP. I.

DE' MODI PER CONOSCERE, DI QUALI GRANDEZZE LE RAGIONI SONO UGUALI, E DI QUALI SONO DISUGUALI.

PROP. I. TEOR. I.

Se due grandezze uguali si paragonano con una terza omogenea, hanno uguali ragioni ad essa terza; e la terza ha uguali ragioni alle due grandezze.

Sieno A, e B (*Fig.* 122.) le due grandezze uguali, e C la terza omogenea. Dico I., che la ragione di A a C uguale alla ragione di B a C; II., che la ragione di C ad A è uguale alla ragione di C a B.

Dim. I. Essendo A, e B uguali per l'ipotesi, quante volte A contiene C, altrettante volte B contiene la stessa C. Sicchè le quantità delle ragioni di A a C, e di B a C sono uguali (1); ma le ragioni, che hanno quantità uguali, sono uguali tra loro (2). Dunque la ragione di A a C è uguale alla ragione di B a C.

II. Essendo A, e B tra loro uguali, la terza C contiene ugual numero di volte, sì A, che B; e perciò le quantità delle ragioni di C ad A, e di C a B essendo tra loro uguali; uguali saranno ancora le ragioni di C ad A, e di C a B (3). Dunque se due grandezze ec. Ch'è ciò, che b. d.

---

(1) *Def.* 7. *lib.* 5. (2) *Def.* 9. *lib.* 5.
(3) *Def.* 9. *lib.* 5.

AVVERTIMENTO.

Queste proposizioni possono rendersi più chiare coll' ajuto de' numeri; onde per darne un' esempio lo faremo vedere in questa, e nella seguente proposizione. Sia tanto A quanto B = 6, e C = 2. È evidente, per la prima parte, che essendo, sì la quantità della ragione di A a C, che di B a C uguale a 3; sarà la ragione di A a C uguale alla ragione di B a C (1). Per quel, che riguarda poi la seconda parte; essendo, sì la quantità della ragione di C ad A, che di C a B uguale a $^2/_6$, cioè $^1/_3$ sarà la ragione di C ad A uguale alla ragione di C a B.

PROP. II. TEOR. II.

Se due grandezze disuguali si paragonano con una terza omogenea, la maggiore ha alla terza maggior ragione, di quel, che v' ha, la minore; ma la terza, e per lo contrario, ha maggior ragione alla minore che alla maggiore.

Sia delle due grandezze disugnali A (*Fig. 123.*) la maggiore, e B la minore, e sia C la terza omogenea. Dico I., che la ragione di A a C è maggiore della ragione di B a C; II., che, per l' opposto, la ragione di C a B è maggiore della ragione di C ad A,

Dim. I. Essendo A maggiore di B, è chiaro, che A contiene C più volte, di quel, che B contiene la stessa C. Laonde la quantità della ragione di A a C è maggiore della quantità della ragione di B a C. Dunque eziandio la ragione di A a C è maggiore della ragione di B a C (2).

II. Essendo B minore di A, la terza C contiene

(1) *Def. 9. lib. 5.* (2) *Def. 9. lib. 5.*

più volte B, che A. Sicchè la quantità della ragione di C a B è maggiore della quantità della ragione di Ç ad A; e perciò la ragione di C a B è maggiore della ragione di C ad A (1). Dunque se due grandezze ec. Ch' è ciò, che b. d.

AVVERTIMENTO.

Sia A = 8, B = 6, e C = 2, sarà, per la prima parte, la quantità della ragione di A a C uguale a ${}^{8}/_{2}$, cioè 4, e la quantità della ragione di B a C uguale a ${}^{6}/_{2}$, cioè 3. Sicchè è manifesto, essere la ragione di A a C maggiore della ragione di B a C. Per la seconda parte poi, essendo la quantità della ragione di C a B uguale a ${}^{2}/_{6}$, o sia ${}^{1}/_{3}$ e conseguentemente maggiore della quantità della ragione di C ad A, ch' è ${}^{8}/_{2}$ cioè ${}^{4}/_{1}$; si vede chiaramente, che la ragione C a B è maggiore della ragione di C ad A.

PROP. III. TEOR. III.

Le grandezze, che hanno uguali ragioni ad una terza sono uguali tra loro, e quelle grandezze, alle quali una terza ha uguali ragioni, sono eziandio tra loro uguali.

Abbiamo le grandezze A, e B (*Fig.* 122.) uguali ragioni alla terza C; e C ugual ragione, sì ad A, che a B. Dico, essere in amendue i casi A, e B uguali tra loro.

I. Sia la ragione di A a C uguale alla ragione di B a C. Se si niega essere A uguale a B; sarà A, o maggiore o minore di B, e perciò la ragione di A a C sarà, o maggiore, o minore della ragione di B

---

(1) *Def. 9. lib. 5.*

a C (1), ma ciò è contro l' ipotesi. Sicchè ripugna, che A non sia uguale a B.

II. Sia la ragione di C ad A uguale alla ragione di C a B. Se si niega essere A uguale a B, sarà A, o maggiore, o minore di B. Onde la ragione di C ad A sarà minore, o maggiore della ragione di C a B (2); ma questo è contro l' ipotesi. Dunque ripugna che A non sia uguale a B. Sicchè le grandezze ec. Ch' è quanto b. d.

PROP. IV. TEOR. IV.

Se due grandezze hanno disuguali ragioni ad una terza, sono tra loro disuguali, e quella è maggiore, che ha maggiore ragione alla terza; ma quella per lo contrario, a cui la terza ha maggior ragione è la minore.

Sia la ragione di A a C (*Fig.* 123.) maggiore della ragione di B a C; e sia per lo contrario la ragione di C a B maggiore della ragione di C ad A. Dico, che in amendue i casi A è maggiore di B.

Dim. I. Sia la ragione di A a C maggiore della ragione di B a C. Se si niega essere A maggiore di B, sarà A, o uguale, o minore di B; e perciò la ragione di A a B sarà, o uguale, o minore della ragione di B a C (3). Ma l'uno, e l' altro ripugna all' ipotesi. Sicchè ripugna, che A non sia maggiore di B.

II. Sia la ragione di C a B maggiore della ragione di C ad A. Se si niega essere A maggiore di B sarà A, o uguale, o minore di B. Onde la ragione di C a B sarà, o uguale, o minore della ragione di C ad A (4); ma ciò ripugna all' ipotesi. Dunque

(1) *Pro. preced.* (2) *Prop. preced.*
(3) *Pro.1., e 2. lib.5.* (4) *Prop.1. e 2. lib.5.*

ripugna ancora, non essere A maggiore di B. Ch' è ciò, che b. d.

PROP. V. TEOR. V.

Le ragioni, che sono uguali ad una terza, sono anche uguali tra loro.

ALla ragione di C a D (*Fig.* 124.) sia uguale, tanto la ragione di A a B, quanto quella di C ad F. Dico, che le ragioni di A a B, e di E ad F sono tra loro uguali; cioè che A sta a B, come E ad F.

Dim. Essendo alla ragione di C a D uguale, sì la ragione di A a B, che la ragione di E ad F; sarà alla quantità della ragione di C a D uguale, sì la quantità della ragione di A a B, che quella di E ad F (1). Sicchè le quantità delle ragioni di A a B, e di E ad F sono tra loro uguali (2); ma quelle ragioni, che hanno quantità uguali, sono uguali tra loro. Dunque la ragione di A a B è uguale alla ragione di E ad F. Ch' è ciò, che b. d.

PROP. VI. TEOR. VI.

Se due ragioni sono uguali, e una di esse è maggiore, o minore d' una terza, anche l' altra è maggiore, o minore della stessa terza.

SIeno le ragioni di A a B, (*Fig.* 124.) e di C a D tra loro uguali. Dico, essere la ragione di A a B maggiore, o minore della ragione di E ad F, secondochè la ragione di C a D è maggiore, o minore della medesima ragione di E ad F.

Dim. Essendo le ragioni di A a B, e di C a D

(1) *Def.* 9. *lib.* 5. (2) *Assi.* 1.

uguali tra loro, uguali saranno ancora le loro quantita; ma secondochè la ragione di C a D è maggiore, o minore delle ragioni di E ad F, così ancora la quantità di quella, e conseguentemente anche la quantità della ragione di A a B è maggiore, o minore della quantità della ragione di E ad F. Dunque sarà la ragione di A a B eziandio maggiore, o minore della ragione di E ad F (1). Ch' è ciò che b. d.

CAP. II.

DELLE PROPRIETA' APPARTENENTI ALLE GRANDEZZE PROPORZIONALI.

DEFINIZIONE.

Si dirà, che si *invertono* i termini d' una proporzione, se gli antecedenti si fanno conseguenti, ed i conseguenti per lo contrario antecedenti; che si *permutano*, se si paragona l'antecedente coll' antecedente e il conseguente col conseguente, che si *compongono*, se si paragonano le somme degli antecedenti; e conseguenti coi medesimi conseguenti; che si *dividono*, se si paragonano gli eccessi degli antecedenti su i respettivi conseguenti co' medesimi conseguenti; si dirà finalmente, che si *convertono*, se si paragonano gli antecedenti cogli eccessi loro su i conseguenti.

Così essendo 12 : 4 = 9 : 3 : *sarà invertendo* 4 *a* 12, *come* 3 *a* 9; *permutando* 12 *a* 9, *come* 4 *a* 3; *componendo* 16 *a* 4, *come* 12 *a* 3, *dividendo* 8 *a* 4 *come* 6 *a* 3; *e finalmente convertendo* 12 *a* 8, *come* 9 *a* 6.

---

(1) *Def. 9. lib.* 5.

PROP. VII. TEOR. VII.

Se quattro grandezze sono proporzionali; invertendo saranno ancora proporzionali.

SIa A (*Fig.* 124.) a B come C a D. dico che invertendo, sarà B ad A, come D a C.

Dim. Essendo per l' ipotesi le ragioni di A a B, e di C a D tra loro uguali, uguali saranno ancora le loro reciproche, cioè di B ad A, e di D a C (1). Sicchè essendo A a B, come C a D. Sarà invertendo B ad A come D a C. Ch' è quel tanto, che b. d.

PROP. VIII. TEOR. VIII.

Se quattro grandezze omogenee sono proporzionali, permutando anche saranno proporzionali.

SIa A a B, come C a D. (*Fig.* 124.) Dico, che permutando sarà A a C, come B a D.

Dim. Essendo A, B, C tre quantità omogenee; sarà la ragione di A a C composta dalle ragioni di di A a B, e di B a C (2); similmente, essendo l' altre tre B, C, D anche omogenee, la ragione di B a D sarà composta dalle ragioni di B a C, e di C a D. Ma le componenti della prima sono eguali alle componenti della seconda; poichè la ragione di A a B è uguale a quella di C a D; e la ragione di B a C è comune. Dunque eziandio le composte di A a C, e di B a D sono uguali. Sicchè essendo A a B, come C a D, sarà permutando A a C, come B a D. Ch' è ciò, che b. d.

---

(1) *Def.* 10. *lib.* 5. (2) *Cor.* 2. *def.* 11. *lib.* 5.

PROP. IX. TEOR. IX.

Se quattro grandezze sono proporzionali, componendo saranno ancora proporzionali.

Sia AB a BC, come DE ad EF. (*Fig.* 125.) Dico, che componendo sarà AC a CB, come DF a FE.

Dim. Essendo per ipotesi la ragione di AB a BC uguale alla ragione di DE ad EF, debbono gli antecedenti AB, e DE contenere ugual numero di volte i conseguenti BC, EF; ma BC, ed EF contengono una sola volta se medesimi. Sicchè è chiaro, che aggiungendo questi agli antecedenti AB, DE; dovranno AC, e DF contenere eziandio ugual numero di volte i conseguenti CB, FE. Onde la ragione di AC a CB è uguale alla ragione di DF a FE (1). Per la qual cosa essendo AB a BC, come DE ad EF, componendo sarà ancora AC a CB, come DF ad FE. Ch'è quel tanto, che b. d.

PROP. X. TEOR. X.

Se quattro grandezze sono proporzionali, dividendo saranno anche proporzionali.

Sia AC a CB, come DF a FE. (*Fig.* 125) Dico, che dividendo sarà AB a BC, come DE ad EF.

Dim. Essendo le ragioni di AC a CB, e di DF a FE uguali per l'ipotesi, debbono gli antecedenti AC, DF contenere ugual numero di volte i loro conseguenti BC, EF; ma contengono BC, EF una sola volta se medesimi. Sicchè tolti questi dagli antecedenti AC, DF; dovranno eziandio gli avanzi AB, DE contenere ugual numero di volte i conseguenti BC, EF;

(1) *Def. 9. lib. 5.*

e perciò la ragione di AB a BC sarà uguale alla ragione di DE ad EF (1). Dunque essendo AC a CB, come DF ad EF, sarà dividendo AB a BC, come DE ad EF. Ch' è ciò, che b. d.

PROP. XI. TEOR. XI

Se quattro grandezze sono proporzionali, convertendo saranno anche proporzionali.

Sia AC a CB, come DF a FE. (*Fig.* 125.). Dico, che convertendo sarà CA ad AB, come FD a DE.

Dim. Essendo AC a CB, come DF a FE; sarà dividendo (2) AB a BC, come DE ad EF; onde invertendo (3) sarà CB a BA, come FE ad ED; e componendo (4) CA ad AB, come FD a DE. Dunque essendo AC a CB, come DF a FD, convertendo sarà ancora CA ad AB come FD a DE. Ch' è quel tanto, che b. d.

PROP. XII. TEOR. XII.

Le grandezze omogenee sono sempre proporzionali, così colle loro aliquote simili, come colli loro moltiplici simili.

Sieno B, e D, (*Fig.* 124.) o aliquote simili, o moltiplici simili delle grandezze omogenee A, e C. Dico, che in ambidue i casi A sta a C, come B a D.

Dim. Essendo B, e D, o aliquote simili, o moltiplici simili di A, e C; è evidente, che quante volte A contiene B, altrettante volte C contiene D (5).

---

(1) *Def.* 9. *lib.* 5. (2) *Prop. preced.*
(3) *Pro.* 7. *lib.* 5. (4) *Prop.* 9. *lib.* 5.
(5) *Def.* 6. *e* 7. *lib.* 5.

Sicchè le quantità delle ragioni di A a B, e di C a D sono uguali. Laonde sarà A a B, come C a D, e permutando (1) A a C, come B a D. Dunque le grandezze ec. Ch' è ciò, che b. d.

PROP. XIII. TEOR. XIII.

Se tutta una grandezza è a tutta un' altra omogenea, come una parte della prima ad una parte della seconda; sarà il residuo della prima al residuo della seconda, come tutta la prima a tutta la seconda.

Sia tutta AC a tutta DF, (*Fig.* 125.) come la parte AB alla parte DE. Dico, che l' avanzo CB sta all' avanzo FE, come tutta AC a tutta DF.

Dim. Essendo AC a DF come AB a DE sarà permutando (2) CA ad AB, come FD a DE, e dividendo (3) CB a BA, come FE ad ED; onde di nuovo premutando, sarà CB a FE, come AB a DE; ma AB sta a DE per l' ipotisi, come AB a DF. Sicchè sarà ancora CB a FE, come AC a DF. Ch' è ciò, che b. d.

PROP. XIV. TEOR. XIV.

Se quattro grandezze sono proporzionali, la prima, e la seconda saranno ambedue uguali; maggiori, o minori della terza, e quarta.

Sia A a B, come C a D. (*Fig.* 124.) Dico I., che se A è uguale a C, anche B è uguale a D; II., se A è maggiore di C, ancora B è maggiore di D;

---

(1) *Prop.* 8. *lib.* 5. (2) *Prop.* 8. *lib.* 5.
(3) *Prop.* 10. *lib.* 5.

III. finalmente; se A è minore di C, eziandio B è minore di D.

Dim. I. Essendo A uguale a C, saranno le ragioni di A a B, e di C a B tra loro uguali (1), ma la ragione di A a B per l'ipotesi è uguale alla ragione di C a D. Sicchè C ha ugual ragione, sì a B, che a D; e perciò B è uguale a D (2).

II. Essendo A maggiore di C, sarà la ragione di A a B maggiore della ragione di C a B (3); ma la ragione di A a B è uguale alla ragione di C a D. Sicchè C avrà maggior ragione a D, che a B. Onde B è maggiore di D (4).

III. Essendo A minore di C, avrà A a B minor ragione, che C a B (5); ma la ragione di A a B è uguale alla ragione C a D. Dunque avrà C minor ragione a D, che a B. Per la qual cosa B è minore di D (6). Ch'è ciò, che b. d.

PROP. XV. TEOR. XV.

Se di quattro grandezze omogenee proporzionali la prima è la massima, l'ultima sarà la minima; e la somma della massima e della minima è sempre maggiore della somma delle altre due.

Sieno AB, (*Fig.* 126.) CD, M, N quattro grandezze omogenee proporzionali, delle quali AB sia la massima. Dico I., che N è la minima; II., che AB, e N insieme prese sono maggiori di CD e M.

Dim. I. AB sta a CD, come M ad N; ma CD è minore della massima AB. Sicchè anche N è mi-

(1) *Prop.* 1. *lib.* 5. (2) *Pro.* 3. *lib.* 5.
(3) *Prop.* 2. *lib.* 5. (4) *Prop.* 4. *lib.* 6.
(5) *Prop.* 2. *lib.* 5. (6) *Prop.* 4. *lib.* 5.

nore di M (1). In oltre, essendo AB a CD come M a N, sarà permutando AB a M come CD a N (2); ma M è minore di AB. Onde eziandio N è minore di CD. Dunque essendo AB la massima, N è la minima.

II. Da AB si tagli AE uguale ad M, e da CD, CF uguale ad N. Essendo AB a CD, come M a N; sarà ancora AB a CD, come AE a CF; e permutando, AB ad AE, come CD a DF. Onde convertendo, sarà AB a BE, come CD a DF (3); ma AB essendo la massima è maggiore di CD. Dunque eziandio BE è maggiore di DF. E poichè sono tra loro uguali, sì le due AE e M, che le due CF e N; sarà la somma di AE e N uguale alla somma di CF e M. Dunque aggiungendo alle prime la porzione maggiore EB, ed alle seconde la porzione minore FD; sarà la somma della massima AB, e della minima N maggiore della somma delle altre due CD e M. Ch' è quel tanto, che b. d.

DEFINIZIONE.

Se vi saranno due serie di quantità tutte omogenee, le ragioni delle prime saranno con ordine diretto uguali alle ragioni delle seconde si diranno le prime quantità avere *ragioni ordinate* alle seconde; ma se poi le ragioni delle prime saranno con ordine contrario uguali alle ragioni delle seconde, si diranno in tal caso le prime avere *ragioni perturbate* alle seconde.

Così le grandezze A, B, C avranno ragioni ordinate alle grandezze D, E, F se A starà a B, come D ad E, e B a C, come E a F; ma

---

(1) *Prop. preced.* (2) *Prop. 8. lib. 5.*
(3) *Prop. 11. lib. 5.*

le medesime grandezze A , B , C avranno per lo contrario ragioni perturbate con D , E , F , se A starà a B , come E a F , e B a C , come D ad E.

PROP. XVI. TEOR. XVI.

Se più grandezze omogenee sono in ordinata , o perturbata ragione con altrettante grandezze anche omogenee ; le prime colle ultime sono sempre proporzionali.

Sieno A , B , C (*Fig. 127.*) tre grandezze , le quali abbiano ragioni ordinate o perturbate con altrettante D , E , F. Dico , che A sta a C , come D a F.

Dim. Essendo A , B , C tre grandezze omogenee , sarà la ragione di A a C composta dalle ragioni di A a B , e B a C. Similmente essendo le tre D , E , F anche omogenee , sarà la ragione di D a F composta da quelle D ad E , e di E a F (1) ; ma in ambidue i casi le componenti della prima sono uguali alle componenti della seconda. Dunque eziandio le composte sono uguali ; e perciò A sta a C , come D a F. Ch'è ciò , che b. d.

PROP. XVII. TEOR. XVII.

Se più grandezze sono in ordinata ragione con altrettante, la somma delle prime sta all' ultima loro, come la somma delle seconde alla loro ultima.

Sieno le grandezze A , B , C in ordinata ragione colle grandezze D , E , F. Dico , che la somma delle prime A , B , C sta all' ultima C , come la somma delle seconde D , E, F all' ultima F.

---

(1) *Cor. 2. def. 11. lib. 6.*

Dim. Essendo A a B, come D ad E sarà componendo A insieme con B a B, come D insieme con E ad E; ma per l'ipotesi B sta a C, come E ad F. Dunque ordinando sarà, come A insieme con B a C, così D insieme con E a F. Sicchè di nuovo componendo sarà la somma di A, B, C all' ultima C, come la somma di D, E, F all' ultima F. Ch' è ciò che b. d.

PROP. XVIII. TEOR. XVIII.

Se più grandezze omogenee sono proporzionali, sarà la somma di tutti gli antecedenti alla somma di tutt' i conseguenti, come uno degli antecedenti al suo conseguente.

Sia A (*Fig.* 127.) a D, come B ad E, e B ad E, come C a F. Dico, che la somma degli antecedenti A, B, C sta alla somma de' conseguenti D, E, F, come uno degli antecedenti al suo conseguente, cioè come A a D, o B ad E, ovvero C a F.

Dim. Essendo A a D, come B ad E, e B ad E, come C a F; sarà permutando A a B, come D ad E, e B a C come E a F (1). Sicchè le grandezze A, B, C, sono in ragion ordinata colle grandezze D, E, F. Onde sarà la somma di A, B, C a C, come la somma di D, E, F, F a F (2), e di nuovo permutando, sarà la somma di A, B, C alla somma di D, E, F, come C a F; ma per l'ipotesi A sta a D, come B a E e B ad E come C ad F. Dunque la somma degli antecedenti A, B, C è alla somma de' conseguenti D, E, F, come C a F, o B a E, o vero A a D, cioè come un' antecedente al suo conseguente. Ch'è ciò, che b. d.

(1) *Prop.* 8. *lib.* 3. (2) *Prop. preced.*

Se vi saranno più grandezze omogenee tali, che la prima sta alla seconda, come la terza alla quarta, e la quinta alla seconda, come la sesta alla quarta; sarà la somma, e la differenza della prima, e della quinta alla seconda, come la somma, e la differenza della terza, e sesta alla quarta.

Sia la prima AB (*Fig.* 128.) alla seconda C, come la terza DE alla quarta F, e la quinta BC a C, come la sesta EL a F. Dico che la somma, e la differenza di AB e BG sarà a C, come la somma, e la differenza di DF ed EL a F.

Dim. I. AB sta a C, come DE a F; e poichè BG sta a C, come EL a F, sarà invertendo C a BG, come F ad EL (1). Onde le grandezze AB, C, e BG avendo ragioni ordinate con DE, F, ed EL; sarà ordinando, come AB a BG, così DE ad EL (2), e componendo, AG a GB, così DL a LE (3); ma GB sta a C, come LE a F. Sicchè eziandio le grandezze AG, GB, e C hanno ragioni ordinate con DL, LE, e F; e perciò ordinando di nuovo, sarà come la somma AG a C, così la somma DL a F.

II. Si tagli da AB, BM uguale a BG, e da DE, EN, che sia uguale ad EL. Avendo (come s'è dimostrato nella prima parte) AB, C e BG ragioni ordinate con DE, F, ed EL; sarà ordinando (4), come AB a BG, così DE ad EL; e poichè BM è uguale a BG, ed EN è uguale ad EL; sarà divi-

(1) *Pro. 7. lib. 5.* (2) *Pro. 16. lib. 5.*
(3) *Prop. 9. lib. 5.* (4) *Prop. 16. lib. 5.*

dendo AM a BG; come DN ad FE (1); ma BG sta a C, come EL a F. Dunque essendo anche le grandezze AM, BG, e C in ordinata ragione con DN, EL, ed F, sarà di nuovo ordinando, la differenza AM a C, come la differenza DN a F. Ch' è ciò che b. d.

DELLA

GEOMETRIA PIANA

LIBRO SESTO.

DEFINIZIONI.

I.

UNa retta si dice divisa in *estrema*, e *media ragione*, se talmente è divisa in un punto, che tutta sia alla parte maggiore, come la parte maggiore alla minore.

II.

Per figure rettilinee *simili* s' intendono quelle, che hanno gli angoli respettivamente uguali, e i lati, che formano gli angoli uguali proporzionali tra loro.

Così, si diranno simili le figure ABC, HIL se avranno gli angoli in A, (Fig. 129.) B, C uguali respettivamente agli angoli in H, I, L e di più se sarà BA ad AC, come IH ad HL; AC, a CB, come HL a LH; e CB a BA, come LI ad IH.

---

(1) *Prop. 10. lib. 5.*

COROLLARIO.

Sia al rettilineo HIL simile, tanto ABC, quanto DEF. Essendo agli angoli H, I, L uguali, sì gli angoli A, B, C, che gli angoli D, E, F; saranno gli angoli A, B, C uguali respettivamente agli angoli D, E, F (1). In oltre essendo alle ragioni di IH a HL, di HL a LI, e di LI a IH, uguali sì le ragioni di BA ad AC, di AC a CB, di CB a BA, che le ragioni di ED a DF, di DF a FE, di FE a ED sarà conseguentemente BA ad AC, come ED a DF, AC a CB, come DF a FE, e CB a BA, come FE a ED (2). Sicchè i rettilinei ABC, DEF simili al terzo HIL sono anche simili tra loro.

CAP. I.

DELLA RAGIONE IN CUI SONO, SI' I TRIANGOLI, CHE I PARALLELOGRAMMI, E DELLA LORO UGUAGLIANZA; COME ANCORA DELLE RAGIONI UGUALI, CHE SI HANNO CON DIVIDERE I LATI, O LA BASE DI QUALSIVOGLIA TRIANGOLO.

PROP. I. TEOR. I.

I triangoli, e i parallelogrammi, che hanno uguali altezze, sono fra loro nella ragione delle basi.

Sieno i due triangoli ABC, (*Fig.* 130.) CBD; e i due parallelogrammi CI, CL racchiusi tra le medesime parallele AD, IL, e conseguentemente d'uguali altezze. Dico, che tanto i triangoli, quanto i parallogrammi suddetti sono tra loro uguali.

Dim. Si concepiscano le basi AC, CD divise nelle parti AE, EF, FG, GC, CH, HD uguali tutte ad una loro aliquota comune, e per conseguen-

(1) *Assi.* 1. (2) *Prop.* 5. *lib.* 5.

za uguali tra loro, e si congiungano le rette BE, BF, BG, BH. È chiaro, che i piccioli triangoli ABE, EBF, FBG, GBC, CBH, HBD, per avere uguali basi; ed esser chiusi tra le medesime parallele, sono tra loro uguali (1); ma eziandio è chiaro, che in quante parti sono divise le basi AC, CD, in altrettante ancora sono divisi i triangoli ABC, CBD. Sicchè tante volte il triangolo ABC contiene il triangolo CBD, quante volte appunto la base AC contiene la base CD. Dunque le due ragioni, cioè del triangolo ABC al triangolo CBD, e della base AC alla base CD hanno quantità uguali; e perciò sono tra loro uguali (2). Per la qual cosa il triangolo ABC sta al triangolo CBD, come la base AC alla base CD. Finalmente essendo i parallelogrammi IC, CL doppj respettivamente de' triangoli ABC, CBD, saranno anch' essi nella ragione della base AC alla base CD (3). Ch' è ciò, che b. d.

PROP. II. TEOR. II.

I triangoli, e i parallelogrammi, che hanno uguali basi, sono nella ragione delle altezze.

Sieno BAC, EDF (*Fig. 131.*) due triangoli, e BI, FL due parallelogrammi, che abbiano le basi BC, EF uguali; ma disuguali le altezze AG, DH. Dico, che sono tra loro nella ragione della altezza AG, DH.

Dim. Si prolunghino le rette GR, e HE verso M, e N in modo, che GM, HN sieno uguali alle basi BC, EF. Essendo BC, EF uguali per l'ipotesi, uguali saranno ancora GM, HN. Onde congiunte le

---

(1) *Prop. 32. lib. 1.* (2) *Def. 9. lib. 5.*
(3) *Prop. 12. lib. 5.*

rette AM, DN, se ne' triangoli MAG, NDH si prendono AG, e DH per basi, saranno le loro altezze MG, NH uguali; e perciò sarà il triangolo MAG al triangolo NDH come AG a DH (1); ma sono fra loro uguali, tanto i triangoli MAG, BAC, quando i triangoli NDH, EDF, per avere, sì le basi, come le altezze uguali (2). Dunque eziandio il triangolo BAC al triangolo EDF; e per conseguenza il parallelogrammo BI al parallelogrammo EL sarà come l'altezza AG all' altezza DH. Ch'è quel tanto, che b. d.

PROP. III. TEOR. III.

I triangoli, e i parallelogrammi, che hanno disuguali basi, e disuguali altezze, sono in ragion composta da quella delle basi, e da quella delle altezze.

Abbiamo, tanto i triangoli ABC, (*Fig. 132.*) DEF, quanto i parallelogrammi BI, EL disuguali, sì le basi BC, EF, che le altezze AG, DH. Dico, essere tra loro in ragion composta delle basi BC, EF, e delle altezze AG, DH.

Dim. Dall'altezza maggiore DH si tagli la porzione HI eguale alla minore AG (3), e si uniscano le rette EI, IF. Poichè i triangoli ABC, IEF, DEF sono tre grandezze omogenee; sarà il primo ABC all'ultimo DEF in ragion composta di ABC a IEF, e di IEF a DEF (4); ma il triangolo ABC sta al triangolo IEF, per avere uguali altezze, come la base BC alla base EF; ed il triangolo IEF sta al triangolo DEF, per avere l'istessa base, come l'altezza

---

(1) *Prop. preced.* (2) *Prop. 32. lib. 1.*
(3) *Prop. 6. lib. 1.* (4) *Cor. 2. def. 11, lib. 5.*

HI, o vero AG all'altezza DH. Sicchè anche il triangolo ABC sta al triangolo DEF, e conseguentemente il parallelogrammo BI al parallelogrammo EL, in ragion composta della base BC alla base EF, e dell'altezza AG all'altezza DH. Ch'è ciò che b. d.

PROP. IV. TEOR. IV.

I triangoli, e i parallelogrammi; che hanno un angolo eguale ad un' angolo, sono in ragion composta de' lati, che formano gli angoli eguali.

ABbiano i triangoli ABC, CDE, (*Fig. 133.*) ed i parallelogrammi CF, CG l'angolo BGA uguale all'angolo DCE. Dico, che sono tra loro in ragion composta di AC a CE, e di BC a CD.

Dim. Si dispongano i triangoli ABC, CDE in modo, che i lati AG, CE formino una retta continuata; per l'uguaglianza degli angoli ACB, DCE, formeranno ancora BC, CD una retta continuata (1). Poichè, congiunta la retta BE, i triangoli ABC, CBE, CED sono tre grandezze omogenee, sarà il primo ABC al terzo CDE in ragion composta di ABC a CBE, e di CBE a CED (2); ma il triangolo ABC sta al triangolo CBE, come AC a CE, ed il triangolo BEC sta al triangolo CED, come BC a CD (3). Dunque sarà eziandio il triangolo ABC al triangolo CDE, e conseguentemente il parallelogrammo CF al parallelogrammo CG in ragion composta di AC a CB, e di BC a CD. Ch'è quanto b. d.

---

(1) *Prop. 16. lib. 1.* (2) *Cor. 2. def. 11. l. 6.*
(3) *Prop. 1. lib. 6.*

PROP. V. TEOR. V.

Se due triangoli, o due parallelogrammi sono eguali, hanno le basi in ragion reciproca delle altezze; e se hanno le basi in ragion reciproca delle altezze, sono tra loro uguali.

SIeno BAC, DEF (*Fig. 134.*) due triangoli, e BG, DH due parallelogrammi. Dico I., che se i triangoli BAC, DEF, e conseguentemente i parallelogrammi BG, DH sono eguali, sarà BC a DF; come EM ad AL. II., che se BC sta a DF, come EM ad AL, saranno, sì i detti triangoli, che i parallelogrammi tra loro uguali.

Dim. I. Sieno uguali i triangoli ABC, EDF, ed in conseguenza i parallelogrammi BG, DH. Dall'altezza maggiore AE si seghi BI, che sia eguale a ME, e si uniscano IB, IC. Essendo uguali i triangoli ABC, EDF, avrà il terzo triangolo IBC ugual ragione ad amendue. Onde sarà il triangolo BIC a DEF, come il medesimo BIC a BAC (1); ma BIC sta a DEF, come BC a DF (2); e BIC sta a BAC, come IL, ovvero EM ad AL (3). Dunque eziandio BC sta a DF, come EM ad AL, cioè la ragione delle basi, è reciproca di quella delle altezze.

II. Sia BC a DF, come EM ad AI. Poichè BC sta a DF, come il triangolo BIC a DEF (4); ed EM; ovvero IL sta ad AL, come l'istesso triangolo BIC al triangolo BAC. È chiaro, che il terzo triangolo BIC ha egual ragione, tanto al triangolo BAC, quanto al triangolo DEF. Dunque i triangoli BAC, DEF, e per conseguenza i parallelogrammi BG, DH sono tra loro uguali (5). Ch'è ciò, che b. d.

---

(1) *Pro. 1. lib. 5.* (2) *Prop. 1. lib. 6.*
(3) *Pro. 3. lib. 6.* (4) *Prop. 1. lib. 6.*
(5) *Prop. 3. lib. 5.*

PROP. VI. TEOR. VI.

Se due triangoli, o due parallelogrammi sono uguali, ed hanno un' angolo eguale ad un'angolo, avranno i lati intorno agli angoli eguali reciprocamente proporzionali; e se hanno i lati intorno agli angoli uguali reciprocamente proporzionali, saranno tra loro uguali.

Sieno ABC, DCE (*Fig. 135.*) due triangoli, e CF, CG due parallelogrammi, i quali abbiano l'angolo ACB uguale all'angolo DCE. Dico I., che se i triangoli ABC, DCE, e conseguentemente i parallelogrammi CF, CG sono uguali sarà AC a CE, come DC a CB; II., che se AC sta a CE, come DC a CB, tanto i triangoli ABC, CDE, quanto i parallelogrammi CF, CG saranno tra loro uguali.

Dim. Si dispongano i triangoli ABC, DCE in maniera, che i lati AC, BE formino una retta continuata; per l'uguaglianza degli angoli ACB, DCE; formeranno ancora BC, CD una retta continuata (1). Essendo il triangolo ABC uguale al triangolo DCE, sarà, congiunta la retta BE il triangolo ABC al triangolo CBE, come il triangolo DEC al medesimo triangolo CEB (2); ma ABC sta a CBE, come AC a CE, e DEC, sta a CEB, come DC a CB (3). Dunque sarà ancora come AC a CE così DC a CB.

II. Sia AC a CE, come CD a CB. Poichè AC sta a CE come il triangolo ABC al triangolo CBE, e DC sta a CB, come il triangolo DEC al triangolo CEB sarà come il triangolo ABC al triangolo ACB, così il triangolo DIC al medesimo triangolo CEB. Per la qual cosa i triangoli ABC CBE (4), e conseguen-

---

(1) *Prop. 1. lib. 1.* (2) *Prop. 1. lib. 5.*
(3) *Prop. 1. lib. 6.* (4) *Prop. 3. lib. 5.*

temente i parallelogrammi CF, CG sono tra loro uguali. Dunque se due ec. Ch' è ciò, che b. d.

PROP. VII. TEOR. VII.

Se in un triangolo si tiri una retta; se ella è parallela ad un lato, dividerà gli altri due lati in parti proporzionali; e se divide due lati in parti proporzionali, sarà parallela al terzo lato.

Nel triangolo ABC si tiri la retta DE. (*Fig.* 135.) Dico. I., che se DE è parallela a BC, divide i lati AB, AC proporzionalmente; II, che se divide i lati AB, AC proporzionalmente è parallela al terzo lato BC.

Dim. I. Sia DE parallela a BC. S' uniscano le rette BE, CD. I triangoli BED avendo la stessa base DE, ed essendo racchiusi fra le medesime parallele DE BC sono tra loro uguali (1); onde il terzo triangolo ADE avrà ugual ragione ad amendue (2); e perciò sarà, come ADE a DEB, così il medesimo ADE a EDC; ma il triangolo ADE sta al triangolo DEB, come AD a DB, e il triangolo ADE sta al triangolo EDC, come AE ad DC (3). Dunque sarà ancora, come AD a DB, così AE ad EC.

II. Sia AD a DB, come AE ad EC. Poichè AD sta a DC, come il triangolo AED al triangolo DEB (4), e AE sta ad EC, come il triangolo ADE al triangolo EDC; sarà ancora AED a DEB, come il medesimo ADE ad ADC. Sicchè i triangoli DEB, EDC sono uguali (5); ma hanno di più la medesima base DE, e sono situati dalla medesima parte. Dunque sono

(1) *Pro. 31. lib. 1.* (2) *Pro. 1. lib. 5.*
(3) *Pro. 1. lib. 6.* (4) *Pro. 1. lib. 6.*
(5) *Pro. 3. lib. 5.*

racchiusi tra le medesime parallele (1). Per la qual cosa DE è parallela a BC. Ch' è quanto b. d.

PROP. VIII. TEOR. VIII.

Se una retta divide l' angolo verticale d' un triangolo in due parti uguali, dividerà la base nella ragione de' lati; e se divide la base nella ragione de' lati, dividerà l' angolo verticale in due parti uguali.

Sia ABC (*Fig. 136.*) un triangolo, il cui angolo ABC sia diviso dalla retta BD. Dico I., che se BD divide l' angolo ABC in due parti uguali, dividerà ancora AC nella ragione de' lati; II., che, se BD divide la base AC nella ragione de' lati, dividerà eziandio l' angolo ABC in due parti uguali.

Dim. I. Divida BD l' angolo ABC in due parti uguali. Pel punto C si tiri CE parallela a BD (2), che s' unisca con AB prolungata in E. Essendo BD parallela a CE, sarà l' angolo esterno ABD uguale all' interno opposto BEC, e l' angolo DBC uguale al suo alterno BCE (3), ma i due angoli ABD, DBC per l' ipotesi sono uguali. Dunque uguali sono ancora gli angoli BEC, BCE, e conseguentemente i lati BE, BC (4), e perciò AB avrà ugual ragione, sì a BE, che a BC (5); ma essendo nel triangolo AEC la retta DB parallela a CE, sarà (6) AD a DC, come AB a BE. Laonde sarà ancora AD a DC, come AB a BC.

II. Per l' ipotesi AD sta a DC, come AB a BC, ma per essere nel triangolo EAC, BD parallele a CE, AD sta a DC anche come AB a BE. Dunque sarà

(1) *Pro. 33. lib. 1.* (2) *Pro. 22. lib. 1.* (3) *Pro. 29. lib. 1.* (4) *Pro. 20. lib. 1.* (5) *Pro. 1. lib. 5.* (6) *Pro. preced.*

come AB a BC, così AB a BE (1), e perciò BC è uguale a BE, e conseguentemente l'angolo DEC è uguale all'angolo ABD (2); ma per le parallele BD, CE, l'angolo ABD è uguale all'angolo BEC, e l'angolo DBC è uguale all'angolo ABD (3). Sicchè eziandio l'angolo ABD è uguale all'angolo DBC. Ch'è ciò, che b. d.

CAP. II.

DELLE LINEE RETTE PROPORZIONALI.

PROP. IX. TEOR. IX.

Se quattro rette sono proporzionali, il rettangolo delle due estreme è uguale al rettàngolo delle due di mezzo; e se quattro rette sono tali, che il rettangolo delle due estreme è uguale al rettangolo delle due di mezzo, saranno le medesime proporzionali.

Sieno A, B, C, D (*Fig. 137.*) quattro rette. Dico I., che se queste sono proporzionali, il rettangolo delle due estreme A, e D è uguale al rettangolo delle due di mezzo B, e C; II., che se il rettangolo delle due estreme A, e D è uguale al rettangolo delle due di mezzo B, e C, le medesime quattro rette sono proporzionali.

Dim. I. Sieno le quattro rette proporzionali, cioè sia A a B, come C a D. Si facciano il rettangolo FH, che abbia il lato FE uguale ad A, ed il lato FG uguale a D; ed il rettangolo IM, che abbia il lato IH uguale a B, ed il lato IL uguale a C. Essendo A a B, come C a D, sarà ancora FE a IH,

(1) *Prop.* 5. *lib.* 5. (2) *Pro.* 15. *lib.* 1.
(3) *Prop.* 19. *lib.* 1.

come IL a FG. Sicchè i parallelogrammi FH, IM hanno i lati intorno agli angoli uguali F recipromente proporzionali. Dunque sono tra loro uguali (1).

II. Sia il rettangolo FH fatto delle due estreme A, e D eguale al rettangolo IM fatto dalle due di mezzo B, e C. Avendo i parallelogrammi uguali FH, IM, gli angoli F, ed I uguali, come retti, avranno eziandio i lati intorno agli angoli uguali reciprocamente proporzionali (2). Onde sarà EF ad HI, come IL a FG; e conseguentemente A a B, come C a D. Ch'è quel tanto che b. d.

PROP. X. TEOR. X.

Se tre rette sono continuamente proporzionali, il rettangolo delle due estreme è uguale al quadrato di quella di mezzo; e se tre rette sono tali, che il rettangolo delle due estreme è uguale al quadrato di quella di mezzo, saranno le medesime continuamente proporzionali.

Sieno A, B, D, (*Fig. 137.*) tre rette. Dico I., che se queste sono continuamente proporzionali, il rettangolo delle due estreme A, e D è uguale al quadrato di quella di mezzo B; II. che se il quadrato di quella di mezzo B è uguale al rettangolo dell'estreme A, e D, le tre rette A, B, D sono continuamente proporzionali.

Dim. I. Sia A a D, come B a D. Si formino il rettangolo FH, che abbia il lato EF uguale ad A, e il lato FG uguale a D, ed il quadrato IM, che abbia il lato IL, e conseguentemente IH uguale a B. Essendo A a B, come B a D, sarà ancora FE ad

(1) *Prop. 6. lib. 6.* (2) *Prop. 6. lib. 6.*

IH, come IL a FG. Sicchè FH, ed IM hanno i lati intorno agli angoli eguali reciprocamente proporzionali. Dunque sono tra loro uguali (1).

II. Sia il rettangolo FH fatto dalle due estreme A, e D uguale al quadrato IM fatto da quella di mezzo B. Essendo FH, IM due parallelogrammi uguali, avranno i lati intorno agli angoli uguali F, ed I reciprocamente proporzionali. Laonde sarà EF ad HI, come IL a FG, cioè A a B, come B a D. Ch'è ciò, che b. d.

PROP. XII. PROB. I.

Date tre rette, ritrovare la quarta proporzionale.

Ris. SIeno AB, BC, AD (*Fig. 138.*) le tre rette date. Si dispongano le due prime AB, BC in modo, che formino una retta continuata; di poi s'adatti al punto A la terza AD, che formi con AC qualsivoglia angolo CAD; e congiunta la retta BD, si tiri finalmente per C la retta CE parallela a BD (2), che s'unisca con AD prolungata in D. Dico, essere DE la quarta proporzionale ricercata.

Dim. Essendo nel triangolo CAE, BD parallela a CE; sarà AB a BC, come AD a DE (3). Dunque DE è la quarta proporzionale dopo le tre rette date AB, BC, AD. Ch'è quel tanto, che b. f., e d.

PROP. XII. PROB. II.

Date due rette, ritrovare la terza proporzionale.

Ris. SIeno AB, BC (*Fig. 138.*) le due rette date, le quali si dispongano in maniera, che formino una retta continuata; indi tirata dal punto A la retta

(1) *Prop. 6. lib. 6.* (2) *Prop. 22. lib. 1.*
(3) *Prop. 7. lib. 6.*

AE, che formi con AC qualunque angolo CAE, si tagli dalla medesima la porzione AD uguale a BC; e congiunta BD, si tiri in fine per C la retta CE parallela a BD che s' incontri con AE nel punto E. Dico, che DE è la terza proporzionale ricercata.

Dim. Essendo nel triangolo CAE, BD parallela a CE, sarà AB a BC, come AD a DE; ma per la costruzione AD è uguale a BG. Sicchè sarà A a BC, come BC a DE. Dunque DE è la terza proporzionale dopo AB, e BC. Ch' è ciò, che b. f., e d.

PROP. XIII. PROB. III.

Date due rette, ritrovare la mezza proporzionale.

Ris. Sieno AB, BC (*Fig. 139.*) le due rette date. Si congiungano le medesime in modo, che formino una retta continuata; e divisa AC in due parti eguali in D, si descriva col centro D, ed intervallo DA, o vero DC il semicerchio AEC; finalmente dal punto B s' innalzi su AC la perpendicolare BE che s' incontri colla periferia AEC nel punto E. Dico, che BE è la mezza proporzionale ricercata.

Dim. Poichè, congiunte le rette AE, EG, l'angolo AEC esistente nel semicerchio è retto; sarà, pel triangolo AEC rettangolo in E, il quadrato della perpendicolare EB uguale al rettangolo di AB e BC (1). Onde essendo le tre rette AB, BE tali, che il rettangolo delle due estreme AB, BC è uguale al quadrato di quella di mezzo BE, saranno le medesime continuamente proporzionali (2), cioè sarà come AB a BE, cioè BE a BC. Per la qual cosa si è ritrovata BE mezza proporzionale tra AB, e BC. Ch' è ciò, che b. f., e d.

(1) *Cor. 2. pro. 12. lib. 2.* (2) *Prop. 10. lib. 6.*

COROLLARII.

I. Dunque la perpendicolare abbassata dall'angolo retto sull'ipotenusa è mezza proporzionale tra le porzioni della medesima.

II. Essendo l'angolo nel semicerchio sempre retto; è chiaro, che se da qualunque punto della periferia d'un cerchio s'abbassa una perpendicolare al diametro, sarà il quadrato della detta perpendicolare uguale al rettangolo fatto dalle porzioni d'un tale diametro; e conseguentemente sarà ella mezza proporzionale tra le suddette porzioni.

AVVERTIMENTI.

I. Tra due rette date (*Fig. 140.*) non solo può ritrovarsi geometricamente una, ma anche 3, 7, 15, 31, ec. mezze continuamente proporzionali. In fatti volendosi tra A, e B ritrovare tre mezze proporzionali; ritrovata prima tra A, e B la mezza C; si trovi poscia, sì tra A, e C la mezza D, che tra C, e B la mezza E; saranno D, C, E le tre mezze proporzionali. Imperocchè essendo A, D, C continuamente proporzionali, sarà A a C in duplicata ragione di D a C (1); ed essendo finalmente C, E, B, continuamente proporzionali, sarà C a B in duplicata ragione di C ad E, ma per essere C mezza proporzionale tra A e B, le ragioni A a C, e di C a B sono eguali. Onde uguali saranno ancora le duplicate, e conseguentemente le semplici di D a C, e di C ad E (2). Dunque essendo A a D, come D a C, D a C, come C ad E, C ad E, come E a B; sono D, C, E tre mezze continuamente proporzionali tra le due A, e B.

---

(1) *Cor. 2. def. 12. lib. 5.*
(2) *Cor. 1. def. 12. lib. 5.*

II. Ancorchè tra due rette date si possono ritrovare 1, 3, 7, 15, ec. mezze proporzionali; nulla però di manco il ritrovarne 2, ovvero altre espresse da numeri che tramezzano tra 1, 3, 7, 15, 31, 63, ec. è assolutamente impossibile nella geometria elementare, appartenendo alla geometria sublime. Il problema di ritrovare due mezze proporzionali, tra due rette date è stato celebre presso l'antichità; avendovi nella di lui soluzione travagliato per esortazione di Platone, tutt' i greci Geometri. Vi sono varj metodi per determinarle pratticamente de' quali ne soggiugnerò per brevità un solo, ch'è il più semplice, ed anche il più facile ad eseguirsi.

Sieno AB, BC (*Fig.* 141.) le due rette date, le quali si dispongano in modo, che formino l'angolo ABC retto; di poi si perdano due squadre DEF, GIH, le quali facendosi sempre combaciare coi lati EF, IH, con gli altri due lati ED, IG s' aggirino intorno ai punti A, e C; finchè, prolungate le rette AB, BC, passino la prima per F; e la seconda per E; saranno EB, BF le due mezze proporzionali. Imperocchè essendo i triangoli AEF, EFC rettangoli in E, e F, ed essendo le rette EB, FB perpendicolari alle loro basi AF, EC; sarà AB a BF, come BE a BF, e BE a BF, come BF a BC (1).

PROP. XIV. PROB. IV.

Data una retta, tagliare da lei qualunque sua parte.

Sia dalla data retta AB (*Fig.* 142.) da tagliarsi, a cagion d' esempio, la terza sua parte. Dal punto A si tiri l' indefinita AC, la quale faccia con AB qualsivoglia angolo BAC; indi presa in AC ad arbitrio

---

(1) *Corol.* 1 *prec.*

la porzione AD, si taglino da DC altre due parti DE, EF, che sieno uguali ad AD (1). Finalmente congiunta BF, si tiri per D, DG parallela a BF (2). Dico, che AG è la terza parte di AB.

Dim. Essendo nel triangolo BAF la retta DG parallela a BF, sarà (3) come FD a DA, così BG a GA, e componendo (4) FA ad AD, così BA ad AG; ma AD è la terza parte di AF. Sicchè eziandio AG è la terza parte di AB. Ch' è quel tanto che b. d.

PROP. XV. PROB. V.

Data una retta dividerla in parti proporzionali alle parti d' un' altra retta già divisa.

Ris. Sieno AB (*Fig.* 143.) la retta indivisa, ed AC divisa nelle parti AD, DE, EC. Si dispongano talmente queste rette, che formino qualsivoglia angolo BAC; e congiunta CB si tirino per gli punti D, ed E le rette DF, EG parallele a CB (5). Dico, che le parti AF, FG, GB sono proporzionali alle parti AD, DE, EC.

Dim. Si tiri pel punto D, DH parallela ad AB. Essendo DC, GH parallelogrammi, saranno DI, IH uguali respettivamente a FG, GB (6). Poichè nel triangolo GAE la retta FD è parallela a GE, sarà AF a FG, come AD a DE (7). Similmente nel triangolo HDC, essendo EI parallela a CH, sarà DI ad IH, e conseguentemente FG a GB, come DE a EC. Sicchè s' è divisa AB in parti proporzionali alle parti di AC. Ch' è ciò, che b. f., e d.

---

(1) *Prop.* 6. *lib.* 1. (2) *Prop.* 22. *lib.* 1.
(3) *Prop.* 7. *lib.* 6. (4) *Prop.* 9. *lib.* 5.
(5) *Prop.* 22. *lib.* 1. (6) *Prop.* 29. *lib.* 1.
(7) *Prop.* 7. *lib.* 6.

COROLLARIO.

È chiaro dunque, che se le parti di AC fossero tutte uguali, uguali sarebbero ancora le parti di AB. Laonde per dividere una data retta AB in qualsivoglia numero di parti uguali, altro non bisogna fare, che prendere nell'indefinita AC tante porzioni uguali, quante ne dinota il numero delle parti uguali, nelle quali si vuol dividere AB, e poscia dividere la data AB in parti proporzionali alle parti di AC.

PROP. XVI. PROB. VI.

Data una retta, dividerla in estrema, e media ragione.

Ris. Sia AB (*Fig.* 144.) la retta data; questa si divida talmente in C, che il rettangolo di BA e AC sia uguale al quadrato di CB (1). Dico, che AB è divisa in C in estrema, e media ragione; cioè, che tutta AB sta alla parte maggiore BC, come BC alla parte minore CA.

Dim. Le tre rette AB, BC, e CA sono tali per la costruzione, che il rettangolo delle due estreme AB, AC è uguale al quadrato di quella di mezzo CB. Sicchè le medesime saranno continuamente proporzionali (2); e perciò sarà AB a BC, come BC a CA. Per la qual cosa s'è divisa la data retta AB secondo l'estrema, e media ragione nel punto C. Ch'è ciò, che b. f. e d.

COROLLARIO.

Sicchè dividere una retta in estrema, e media ragione, è l'istesso, che dividerla talmente in un

(1) *Prop.* 16. *lib.* 2. (2) *Prop.* 10. *lib.* 8.

punto, che il rettangolo della tutta, ed una parte sia uguale al quadrato dell'altra parte.

CAP. III.

DELLE FIGURE RETTILINEE SIMILI.

PROP. XVII. TEOR. XI.

I triangoli equiangoli sono simili, cioè hanno i lati intorno agli angoli uguali proporzionali, e quei lati sono omologi, che sono opposti ad angoli uguali.

Abbiano i triangoli ABC, DCE (*Fig.* 145.) gli angoli in A, B, C, uguali respettivamente agli angoli in D, C, E. Dico, essere tali triangoli simili, cioè, che sarà AB a BC, come DC a CE, BC a CA, come CE a ED, e CA ad AB, come ED a DC.

Dim. Si dispongano i triangoli ABC, DCE in modo, che BC, e CE formino una retta continuata, e si prolunghino BA, ED finche s' incontrino in F. Essendo l'angolo DCE esterno delle rette DC, FB, uguale all' interno opposto FBC, sarà BC parallela con FB (1). Similmente essendo l'angolo ACB esterno delle rette AC, FE; uguale all' interno opposto FEC, saranno le suddette AC, FE parallele. Onde CF è un parallelogrammo, e perciò uguali sono, sì le due rette AF, DC, come ancora le due AC, FD. Poichè nel triangolo FBE la retta AC è parallela a FE; sarà, come BA ad AF ovvero CD, così BC a CE (2), e permutando, AB a BC, così BC a CE; e per essere nel medesimo triangolo BEF la retta CD parallela a BF, sarà di vantaggio BC a CE, così

(1) *Prop.* 18. *lib.* 1. (2) *Prop.* 7. *lib.* 6.

FD, ovvero AC a DE, e permutando, BC a CA, così CE a ED. Finalmente essendo le tre grandezze AB, BC, CA in ordinata ragione coll' altre tre DC, CE, ED; sarà ordinando BA ad AC, come CD a DE (1), ed invertendo CA ad AB, come ED a DC (2). Dunque i triangoli ec. Ch' è ciò, che b. d.

PROP. XVIII. TEOR. XII.

I triangoli, che hanno i lati proporzionali sono simili, cioè sono equiangoli, ed hanno uguali gli angoli opposti ai lati omologi.

Abbiano i triangoli ABC, DEF (*Fig. 146.*) i lati proporzionali; cioè sia AE a BC, come DE ad EF, BC a CA, come EF a FD e CA ad AB, come FD a DE. Dico, che tali triangoli sono equiangoli, e quegli angoli hanno tra loro uguali, che sono opposti ai lati omologi.

Dim. Si formino ne' punti E, ed F della retta EF gli angoli FEG, EFG ugual respettivamente agli angoli B, e C; e si prolunghino EG, FG finchè s' uniscano in G; sarà ancora l' angolo G uguale all' angolo A. Sicchè i triangoli ABG, GEF sono equiangoli; onde (3) sarà, come AB a BC, così GE ad EF; ma per l' ipotesi come AB a BC, così sta DE ad EF. Dunque sarà, come GE a EF, così DE alla stessa EF (4); e perciò GE, ED sono uguali (5). In oltre essendo alla ragione di BC a CA uguale, sì la ragione di EF a FG, che di EF a FD, saranno le ragioni di EF a FG, e di EF a FD tra loro uguali e perciò uguali saranno ancora le rette GF,

(1) *Prop. 16. lib. 5.* (2) *Pro. 7. lib. 5.*
(3) *Pro. prec.* (4) *Prop. 5. lib. 5.*
(5) *Prop. 3. lib. 5.*

DF. Sicchè i triangoli EGF, EDF sono tra loro equilateri, e conseguentemente equiangoli (1). Per la qual cosa il triangolo ABC essendo equiangolo con DEF, sarà equiangolo eziandio con EGF. Onde sarà l'angolo A uguale a D; l'angolo B uguale a DEF, e l'angolo C uguale all'angolo DFE. Dunque i triangoli ec. Ch'è ciò, che b. d.

PROP. XIX. TEOR. XIII.

Se due triangoli hanno un' angolo uguale ad un angolo, e i lati intorno a tali angoli proporzionali; saranno equiangoli, ed in conseguenza simili.

Abbiano i triangoli ABC, (*Fig.* 147.) DEF l'angolo ABC uguale all'angolo DEF, e sta, come AB a BC, così DE ad EF. Dico, che saranno eziandio uguali, sì gli angoli A, e D opposti ai lati omologi BC, EF, che gli angoli C, e F opposti agli altri lati omologi BA, ED.

Dim. Si formino ne' punti E, ed F della retta EF (2), l'angolo FEG uguale all'angolo B. e conseguentemente all'angolo FED, e l'angolo FED uguale all'angolo C, sarà il terzo angolo G uguale al terzo A. Onde essendo i triangoli ABC, GEF equiangoli; sarà, come AB a BC, così GE ad EF: ma per l'ipotesi, come sta AB a BC, così ancora DE ad EF. Dunque sarà, come GE ad EF, così DE alla stessa EF (3); e perciò GE è uguale a DE (4). Sicchè i triangoli GEF, DEF; avendo il lato GE uguale a DE, il lato EF comune, e l'angolo GEF uguale all'angolo DEF, sono tra loro equiangoli; ma il triangolo ABC è equiangolo col triangolo GEF.

---

(1) *Prop.* 1. *lib.* 1. (2) *Pro.* 8. *lib.* 1.
(3) *Prop.* 5. *lib.* 5. (4) *Prop.* 3. *lib.* 5.

Dunque il medesimo triangolo BAC sarà ancora equiangolo col triangolo EDF ; e perciò saranno i suddetti triangoli ABC, DEF simili (1). Ch' è quanto b. d.

PROP. XX. TEOR. XIV.

Se due triangoli hanno due lati proporzionali a due lati, e degli angoli opposti ai lati omologi, due uguali, e due altri della medesima specie, cioè ambidue, o acuti, o ottusi; saranno tali triangoli equiangoli, e conseguentemente simili.

Abbiamo i triangoli ABC, (*Fig. 148.*) DEF i lati BA, AC proporzionali ai lati ED, DF, gli angoli B, ed E uguali, e gli angoli C, e F della medesima specie. Dico, che tali triangoli sono equiangoli, cioè, che sono uguali, sì gli angoli C, ed F, che gli angoli BAC, EDF.

Dim. Se si niega essere l'angolo BAC uguale all' angolo EDF, sarà il primo maggiore, o minore del secondo, sia s' è possibile maggiore; onde facciasi nel punto A della retta BA l'angolo BAL uguale all'angolo EDF; sarà ancora l' angolo BLA uguale all' angolo EFD (2). Sicchè essendo equiangoli i due triangoli BAL, EDF, sarà DA ad AL, come ED a DF; ma per l' ipotesi BA sta ad AC, anche come ED a DF. Dunque sarà BA ad AL, come la stessa BA ad AC (3); e perciò sarà AL uguale ad AC. Laonde essendo il triangolo CAL isoscele, saranno gli angoli ALC, ACL uguali, ma l' angolo ACL è della stessa specie dell' angolo F, e conseguentemente del suo uguale ALB. Sicchè eziandio i due angoli ALC, ALB sono della medesima specie, cioè ambi-

(1) *Prop. 17. lib.6.* (2) *Cor. 4. pro. 23. lib. 1.*
(3) *Prop. 5., e 3. lib. 5.*

due, o ottusi, o acuti; ma ciò ripugna; dovendo insieme presi esser uguali a due retti (1). Dunque ripugna ancora, che l'angolo BAC sia maggiore dell'angolo EDF; nello stesso modo si dimostra, che non può essere minore. Per la qual cosa l'angolo BAC è uguale all'angolo EDF; e perciò anche l'angolo ACB è uguale all'angolo DFE. Laonde i triangoli ABC, DEF essendo equiangoli, sono simili. Ch'è ciò, che b.d.

PROP. XXI. TEOR. XV.

Se due triangoli, hanno due lati proporzionali a due lati, e i rimanenti lati uniti in un punto comune in un modo, che i lati omologi sieno paralleli; saranno tali triangoli simili, e i detti rimanenti lati a dirittura.

Abbiano i triangoli ABC, (*Fig.* 145.) DCE i due lati AB, AC proporzionali ai due lati DC, DE, e i rimanenti lati BC CE uniti in maniera nel punto C, che sieno tra loro paralleli, sì AB, DC, che AC, DE. Dico, essere i triangoli ABC, DCE simili, e i lati BC, CE a dirittura.

Dim. Essendo AB parallela con DC, e CA parallela con ED, sarà all'angolo AGD uguale, sì l'angolo A, che l'angolo D (2); e perciò gli angoli A, e D saranno uguali. Sicchè i triangoli ABC, DCE avendo l'angolo A uguale all'angolo D, e i lati intorno ad essi proporzionali, sono tra loro simili (3). In oltre, essendo l'angolo ACB uguale all'angolo DEC, e ACD uguale a CDE sarà tutto l'angolo DCB uguale ai due CDE DEC; onde aggiuntovi di comune DCE, saranno i due DCB, DCE uguali ai tre CDE, EDC,

(1) *Prop.* 13. *lib.* 1. (2) *Prop.* 19. *lib.* 1.
(3) *Prop.* 19. *lib.* 6.

ECD, ma questi appartenendo al medesimo triangolo sono uguali a due retti (1). Dunque i due angoli DCB, DCE anche sono uguali a due retti; e perciò BC, CE sono a dirittura (2). Ch' è ciò, che b. d.

PROP. XXII. TEOR. XVI.

Se in un triangolo rettangolo dall'angolo retto s' abbassa una perpendicolare alla base; questa dividerà il triangolo in altri due triangoli simili all' intero, e simili tra loro.

NEl triangolo rettangolo ABC (*Fig.* *149.*) s' abbassi dall' angolo retto B la retta BD, che sia perpendicolare alla base AC, questa dividerà il triangolo ABC ne' due ADB, CDB. Dico, che i suddetti triangoli ADB sono simili all' intero ABC, e simili tra loro.

Dim. I triangoli ADB, ABC hanno gli angoli ADB, ABC uguali, come retti, e l' angolo in A comune; onde avranno ancora l' angolo ABD uguale a BCA (3). Sicchè essendo equiangoli, sono simili (4). Di più i triangoli BDC, ABC hanno gli angoli BDC, ABC uguali, perchè retti, e l' angolo in C comune. Dunque avranno ancora il terzo CBD uguale al terzo CAB e perciò essendo equiangoli, sono anche simili. Finalmente i triangoli ADB, BDC essendo simili al terzo BAC, sono eziandio simili fra loro (5). Per la qual cosa, se nel triangolo ec. Ch' è ciò, che b. d.

COROLLARIO.

Essendo il triangolo BAG simile al triangolo ABD, sarà (6) CA ad AD, come AB ad AD, e

(1) *Prop.* 23. *lib.* 1. (2) *Prop.* 14. *lib.* 6.
(3) *Cor.* 4. *pro.* 23. *l.* 1. (4) *Pro.* 17. *lib.* 6.
(5) *Cor. def.* 2. *lib.* 6. (6) *Def.* 2. *lib.* 6.

per essere il medesimo triangolo CBA simile al triangolo BDC, sarà AC a CB, come CB a CD. Sicchè ciascun lato del triangolo rettangolo è mezzo proporzionale tra l'ipotenusa, e la porzione a se contigua. Finalmente essendo i triangoli BDA, BDC simili tra loro, sarà come AD a DB, così DB a DC. Dunque la perpendicolare abbassata dall'angolo retto è mezza proporzionale tra le due porzioni dell'ipotenusa divisa. Qual verità si è con altro principio anche dimostrata nel corollario primo della proposizione 13. di questo.

PROP. XXIII. TEOR. XVII.

I parallelogrammi, che sono intorno la diagonale d'un altro, sono simili all'intero, e simili tra loro.

Sieno i parallelogrammi EG, (*Fig.150.*) HF intorno la diagonale AC del parallelogrammo BD. Dico, che i suddetti parallelogrammi EG, HF sono simili all'intero BD, e simili tra loro.

Dim. Essendo EF parallela con BC, e GH con DC, avranno i parallelogrammi EG, BD, sì l'angolo AEI uguale all'angolo ABC, che l'angolo AGI uguale all'angolo ADC (1); hanno di più l'angolo in A comune. Siechè avranno ancora l'angolo GIE uguale all'angolo DCB; e perciò sono equiangoli; ma hanno in oltre i lati intorno agli angoli uguali proporzionali. Imperocchè essendo i triangoli AEI, ABC equiangoli, sarà AF ad EI, come AB a BC, ed EI a IA, come BC a CA; ma per essere i triangoli AGI, ADC anche equiangoli, AI sta ad IG, come AC a CD. Sicchè ordinando (2) sarà EI a IG, come BC a BD; e perciò EG è simile a BD (3).

(1) *Prop. 19. lib. 1.* (2) *Prop. 16. lib. 5.*
(3) *Def. 2. lib. 6.*

Nella medesima maniera si dimostra, essere HF simile a BD. Dunque essendo al terzo parallelogrammo AD simile, tanto EG, quanto HF, saranno i parallelogrammi EG. HD anche simili tra loro (1). Ch'è quanto b. d.

PROP. XXIV. TOER. XVIII.

Se due parallelogrammi sono simili, ed hanno un' angolo comune, sono intorno la medesima diagonale.

Sieno i parallelogrammi EG, (*Fig.* 151.) BD simili, ed abbiano l'angolo in A comune. Dico, che sono intorno la medesima diagonale AC.

Dim. Non passi, s'è possibile, la diagonale AC pel punto F, ma s'incontri col lato GF prolungato in I, e si tiri per I IH, parallela ad EF. Essendo i parallelogrammi BD, HG intorno la medesima diagonale AIG, saranno trà loro simili (2); ma per l'ipotesi anche il parallelogrammo EG è simile a BD. Sicchè FG, HG sono tra loro simili (3), e perciò sarà, come GA ad AE, così GA ad AH. Onde AE è uguale ad AH (4); ma ciò ripugna. Dunque ripugna ancora, che AC non passi pel punto F. Ch'è quanto b. d.

PROP. XXV. TEOR. XIX.

I triangoli simili sono fra loro in duplicata ragione de' lati omologi.

Sieno ABC, DEF (*Fig.* 152.) due triangoli simili, cioè che abbiano gli angoli A, B, C respetti-

(1) *Prop.* 21. *lib.* 1. (2) *Prop. preced.*
(3) *Cor. def.* 2. *lib.* 6. (4) *Prop.* 3. *lib.* 5.

vamente uguali agli angoli B, E, F, e i lati intorno de' medesimi proporzionali. Dico, essere tali triangoli in duplicata ragione de' lati omologi AB, DE.

Dim. Essendo i triangoli ABC, DEF simili, sarà BA ad AC come ED a DF, e permutando AB a DE, come AC a DF (1). Sicchè le ragioni AB a DE, e di AC a DF sono uguali; ma i triangoli ABC, DEF, per avere l'angolo A uguale all'angolo D, sono in ragion composta de' lati, che formano detti angoli (2), cioè di AB a DE, e di AC a DF. Dunque essendo tali ragioni uguali, saranno in ragion duplicata d'una di esse (3), e conseguentemente in ragion duplicata de' lati omologi AB DE. Ch'è ciò che b. d.

PROP. XXVI. TEOR. XX.

I poligoni simili si dividono in triangoli eguali in numero, simili tra loro, proporzionali all' interi poligoni, e sono i suddetti poligoni in duplicata ragione de' lati omologi.

Sieno ABCDE, FGHIK (*Fig.* 152.) due poligoni simili. Dico I., che i medesimi si dividono in triangoli uguali in numero, e simili respettivamente tra loro; II., che i suddetti triangoli sono proporzionali all'interi poligoni, e che i poligoni simili sono in duplicata ragione de' lati omologi.

Dim. I. Essendo simili i poligoni ABCDE, FGHIK. È chiaro, che quanti angoli nel primo sono opposti all' angolo A, altrettanti nel secondo sono opposti all' angolo F; onde siccome il primo colle rette AC, AD si divide in tre triangoli, in tre ancora dividesi il secondo colle rette FH, FI in oltre, essendo

(1) *Prop.* 8. *lib.* 5. (2) *Prop.* 4. *lib.* 6.
(3) *Prop.* 12. *lib.* 5.

l' angolo B uguale a G, e AB a BC, come FG a GH; sarà il triangolo ABC simile al triangolo FGH (1); e per la medesima ragione, sarà anche il triangolo AED, simile al triangolo FKI. Finalmente essendo gl' interi angoli BCD, CDE uguali agl' interi angoli GHI, HIK, e gli angoli BCA, EDA uguali agli angoli GHF, KIF, saranno ancora i rimanenti ACD, CDA uguali ai rimanenti FHL, HIF, e conseguentemente il terzo CAD sarà uguale al terzo HFI. Dunque anche i triangoli ACD, FHI sono simili (2).

II. Essendo simili tra loro, sì i triangoli ABC, FGH, che i triangoli ACD, FHI, saranno tanto i primi, quanto i secondi in duplicata ragione de' lati omologi AC, FH (3); e perciò sarà il triangolo ABC a FGH, come ACD a FHI (4). Similmente si dimostra, essere il triangolo ACD a FHI, come ADE a FIK. Sicchè sarà la somma di tutti gli antecedenti, cioè il poligono ABCDE alla somma di tutt' i conseguenti, o sia al poligono FGHIK, come un solo antecedente ABC a un solo conseguente FGH (5); ma il triangolo ABC sta al triangolo FGH in duplicata ragione di AB a FG. Dunque eziandio il poligono ABCDE sta al poligono FGHIK in duplicata ragione di AB a FG. Ch' quel tanto, che b. d.

COROLLARIO.

Essendo tutt' i quadrati fra loro simili, sono per conseguenza in duplicata ragione de' loro lati. Dunque la ragion duplicata di due rette è la medesima, che la ragione de' quadrati fatti sulle medesime rette.

---

(1) *Prop.* 19. *lib.* 6. (2) *Prop.* 17. *lib.* 5.
(3) *Prop. prec.* (4) *Prop.* 5. *lib.* 5.
(5) *Prop.* 18. *lib.* 5.

PROP. XXVII. TEOR. XXI.

In ogni triangolo rettangolo, la figura formata sull' ipotenusa è uguale alle figure ad essa simili, fatte su i cateti.

Sieno BF, BG, AL, (*Fig.* 153.) tre figure simili, che abbiano per lati omologi i lati del triangolo rettangolo BAC. Dico, che la figura BF fatta sull' ipotenusa BC è uguale all' altre due BG, AL fatte su i cateti BA, AC.

Dim. Essendo le figure simili nella medesima ragione, che i quadrati fatti su i lati omologi (1); sarà la figura BF alle figure BG, AL, come il quadrato di BC ai quadrati di BA, e AC; ma il quadrato dell' ipotenusa BC è uguale ai quadrati de' cateti BA, AC (2). Dunque eziandio la figura BF è uguale alle figure BG, AL. Ch' è ciò, che b. d.

PROP. XXVIII. TEOR. XXII.

Se quattro rette sono proporzionali, le figure simili, che hanno per lati omologi queste rette sono anche proporzionali; e se i rettilinei, che hanno per lati omologi tali rette sono proporzionali, eziandio le quattro rette sono proporzionali.

Sieno AB, CD, EF, GH (*Fig.* 154.) quattro rette. Dico I., che se queste sono proporzionali, anche proporzionali sono i rettilinei simili M, N, O, P, che hanno per lati omologi tali rette; II., che se i rettilinei M, N, O, P, sono proporzionali, anche le rette AB, CD, EF a GH sono proporzionali.

Dim. I. Sieno le ragioni di AB a CD, e di

(1) *Cor. preced.* (2) *Prop.* 12. *lib.* 2.

EF a GH uguali saranno eziandio le loro duplicate (1); ma i rettilinei simili sono in duplicata ragione de' lati omologi (2). Sicchè la ragione de' rettilinei M, e N è uguale alla ragione de' rettilinei O, e P.

II. Sia la ragione de' rettilinei M, e N uguale alla ragione de' rettilinei O, e P; sarà ancora la ragione duplicata di AB a CD, uguale alla duplicata di EF a GH e conseguentemente la semplice ragione di AB a CD uguale sarà alla semplice ragione di EF a GH. Dunque le quattro rette AB, CD, EF, GH, sono proporzionali. Ch' è quel tanto, che b. d.

PROP. XXIX. PROB. VII.

Data una figura rettilinea, ed una linea retta descrivere su di essa un altra figura simile alla data.

Ris. Sieno DE (*Fig.* 155.) il dato rettilineo, e AB la data retta. Si divida il rettilineo DE in triangoli colla retta CF; di poi si formino nella retta AB gli angoli ABH, BAH uguali respettivamente agli angoli CDF DCF (3); sarà ancora il terzo angolo AHB uguale al terzo angolo CFD (4). Si formino in oltre nella retta AH gli angoli AHG, HAG uguali respettivamente agli angoli CFE, FCE sarà ancora l' angolo G uguale all' angolo E. Dico essere BG il rettilineo ricercato.

Dim. Essendo per la costruzione gli angoli BAH, HAG uguali respettivamente agli angoli DCF, FCE; sarà l' intero angolo BAG uguale all' intero angolo DCE; e per la medesima ragione sarà anche l' angolo BHG uguale all' angolo DFE; sono di più gli angoli B, e

(1) *Cor.* 1. *def.* 12. *lib.* 5.
(2) *Prop.* 26. *lib.* 6.
(3) *Pro.* 8. *lib.* 1. (4) *Cor.* 4. *pro.* 23. *lib.* 1.

G uguali agli angoli D, ed E. Sicchè il rettilineo BG è equiangolo con DE. In oltre essendo equiangoli tra loro, sì i triangoli AGH, GEF, che i triangoli ABH, CDF; sarà GA ad AH, come EC a CF, e HA ad AB, come FC a CD (1); onde ordinando sarà GA ad AB, come EC a CD (2). Similmente si dimostra essere AB a BH, come CD a DF, BH ad HG, come DF a FE, HG a GA, come FE a EG. Dunque sulla retta AB s'è formato il rettilineo BG simile al dato DE. Ch'è ciò, che b. f., e d.

PROP. XXX. PROB. VIII.

Dati due rettilinei, formarne un terzo, che sia simile al primo, e uguale al secondo.

Ris. Sieno A, e B (*Fig.* 156.) i rettilinei dati. Si formi su CD lato del rettilineo A il parallelogrammo CG, al medesimo rettilineo A uguale; di poi si formi su DG l'altro parallelogrammo DH uguale al rettilineo B, che abbia l'angolo GDE uguale all'angolo FCD (3). Finalmente, ritrovata tra CD, e DE la mezza proporzionale IK (4), si formi sopra di essa il rettilineo L simile al rettilineo A (5). Dico, essere L il rettilineo ricercato.

Dim. Essendo le tre rette CD, IK, e DE continuamente proporzionali, sarà il rettilineo A al rettilineo L in duplicata ragione di CD ad IK, e conseguentemente, come CD a DE (6); ma nella medesima ragione di CD a DE è ancora il parallelogrammo CG al parallelogrammo GE, o sia il rettilineo A al rettilineo B. Dunque il rettilineo A ha ugual ra-

(1) *Pro.* 17. *lib.* 6. (2) *Pro.* 16. *lib.* 5.
(3) *Pro.* 37. *lib.* 1. (4) *Pro.* 13. *lib.* 6.
(5) *preced.* (6) *Cor.* 2. *def.* 12. *l.* 5.

gione, sì al rettilineo L, che al rettilineo B (1); e perciò il rettilineo L è uguale a B (2). S'è formato dunque il rettilineo L simile ad A, è uguale a B. Ch'è ciò, che b. f. e d.

PROP. XXXI. TEOR. XXIII.

Di tutt' i parallelogrammi situati sopra una data retta, e mancanti dai rispettivi interi per altri parallelogrammi simili tra loro, il massimo è quello, che sta situato sulla metà della data retta.

Sieno sulla retta AB (*Fig.* 157.) situati i parallelogrammi AG, AD, AK, mancanti dai rispettivi interi AR, AE, AH per gli parallelogrammi QR, CE, TH simili tra loro. Dico, che di tutt' i parallelogrammi AG, AD, AK, il massimo è AD situato su AC, metà della data retta AB.

Dim. Essendo i parallelogrammi QR, CE, TH simili, ed avendo l'angolo in B comune, saranno intorno la medesima diagonale BK (3). Si prolunghino QG in L, e CD in M. Poichè OP è uguale a PR, sarà OD uguale a PE (4); ma PE è maggiore di CE, e conseguentemente maggiore di GC (5). Sicchè anche OD è maggiore di CG; e perciò aggiuntovi di comune AP, sarà AD maggiore di AG. In oltre essendo DE uguale a DF, sarà DH, e per conseguenza DT uguale a DI, onde DT è maggiore di NI, e aggiuntovi di comune AN, sarà AD maggiore di AK. Dunque di tutti ec. Ch' è ciò, che b. d.

---

(1) *Prop.* 5. *lib.* 5.
(2) *Prop.* 3. *lib.* 5.
(3) *Prop.* 24. *lib.* 6.
(4) *Prop.* 32. *lib.* 1.
(5) *Prop.* 30. *lib.* 1.

PROP. XXXII. PROB. IX.

Dato un rettilineo , un parallelogrammo , ed una retta , situare sulla medesima un parallelogrammo uguale al dato rettilineo , che sia mancante dall' intero per un' altro parallelogrammo simile al dato ; bisogna però , che il dato rettilineo non sia maggiore del parallelogrammo , che può situarsi sulla metà della retta data.

Ris. Sieno AB (*Fig.* 158.) la retta data , O il rettilineo , e U il parallelogrammo. Si divida AB in due parti uguali in C , e descritto sulla metà CB il parallelogrammo CE simile al dato U , si compisca l' intero BD. Se CD è uguale ad O , sarà CD il parallelogrammo ricercato (1) ; se poi CD è maggiore di O , si ritrovi in tal caso l' eccesso di CD sopra O, e sia Z ; e fatto il parallelogrammo HG simile a CE, e uguale a Z (2) ; si prolunghi HI in M , e L e GI in K. Dico ; essere AI il parallelogrammo ricercato.

Dim. Essendo CE uguale a CD , e HG uguale a Z ; è chiaro , che se da CE si toglierà HG , la somma di CI , e KE sarà uguale ad O ; ma per essere CI uguale ad IE (3) , aggiuntovi di comune KL , sarà CL ovvero CM (4) uguale a KE , e aggiuntovi anche di comune CI , sarà AI uguale alla somma di CI , e somma di CI , e KE , e conseguentemente uguale ad O. Di più AI manca dall' intero AL pel parallelogrammo KL , il quale per essere intorno la diagonale BF del parallelogrammo CE , è simile a CE , ed in conseguenza al dato U. Dunque s' è situato sulla data retta

(1) *Prop. prec.*
(2) *Prop.* 30. *lib.* 6.
(3) *Pro.* 30. *lib.* 1.
(4) *Pro.* 32. *lib.* 1.

AB il parallelogrammo AG, che ha le condizioni ricercate. Ch'è quanto b. f., e d.

PROP. XXXIII. PROB. X.

Dato un rettilineo, un parallelogrammo, ed una retta, situare sulla medesima un parallelogrammo uguale al dato rettilineo, e che ecceda il parallelogrammo situato sulla data retta per un altro parallelogrammo simile al dato.

Ris. Sieno AB (*Fig.* 159.) la retta data, C il rettilineo, e D il parallelogrammo. Si divida AB in due parti uguali in E, e fatto su EB il parallelogrammo EG simile a D, si ritrovi la somma di EG, e C che sia R, e si descriva il parallelogrammo LM uguale a R, e simile a GE, che abbia col medesimo l'angolo F di comune (1); indi tirasi per A la retta AH parallela a MN, che s'unisca con NL prolungata in H, si prolunghino GB in O, e AB in I. Dico, essere HI il parallelogrammo ricercato.

Dim. Il parallelogrammo LM è uguale a R, cioè alla somma di EG, e C; onde toltone FG, saranno i rimanenti parallelogrammi LI, BM uguali a C; ma per essere HE uguale a LB e conseguentemente a BM (2), aggiuntovi LI di comune, sarà HI uguale alla somma di LI, e BM, e perciò uguale a C. In oltre HI eccede HB parallelogrammo OI, il quale, essendo intorno la diagonale NF, è simile a LM (3), e per conseguenza a D. Dunque s'è formato il parallelogrammo HI, il quale ha le ricercate condizioni. Ch'è ciò che b. f., e d.

---

(1) *Prop.* 30. *lib.* 6.
(2) *Prop.* 32. e 30. *lib.* 1.
(3) *Prop.* 23. *lib.* 6.

CAP. IV.

DELLA RAGIONE, IN CUI SONO GLI ANGOLI FATTI AI CENTRI, E ALLE PERIFERIE DI CERCHI, COME ANCORA I SETTORI CIRCOLARI; E DELLA RAGIONE, IN CUI SONO, SÌ I CERCHI, CHE LE LORO PERIFERIE.

PROP. XXXIV. TEOR. XXIV.

Ne' cerchi uguali gli angoli formati ai centri, e alle periferie, sono proporzionali agli archi, su' quali appoggiano; come anche i settori.

Sieno ABC, EFG (*Fig. 160.*) due cerchi uguali, e sieno BDC, FHG due angoli fatti ne' centri D, e H; BAC, FEG due angoli alle periferie; e BDC, FHG due settori. Dico, che nella ragione dell' arco BC all' arco FG, sono fra loro, così i sopraddetti angoli ai centri, ed i settori, come ancora gli angoli alle periferie BAC, FEG.

Dim. Si concepiscano gli archi BC, FG divisi nelle parti BI, IL, LC, FM, MC uguali tutte ad una loro aliquota comune, e conseguentemente uguali tra loro, e si tirino le rette DI, DL, HM. Gli angoli BDI, IDL, LDG, FHM, MHG appoggiando su archi uguali, sono tra loro uguali (1); e perciò uguali sono ancora i piccioli settori BDI, IDL, LDC, FHM, MHG; in oltre in quante parti sono divisi gli archi BC, FG, in altrettante ancora sono divisi, sì gli angoli BDC, FHG, che i settori BDC, FHG. Sicchè quante volte l'angolo BDC contiene l' angolo FHG, e 'l settore BDC il settore FHG, tante volte appunto l'arco BC contiene l'arco FG. Dunque l'angolo BDC sta all' angolo FHG, e 'l settore BDC al settore FHG, come l'arco BC all' arco FG (2).

---

(1) *Prop. 32. lib. 3.* (2) *Def. 7. e 9. lib. 5.*

Finalmente essendo gli angoli BAC, FEG le respettive metà degli angoli BDC, FHG (1), sarà BAC a FEG nella ragione di BDC a FHG (2), e per conseguenza nella ragione dell'arco BC all'arco FG. Ch'è ciò, che b. d.

COROLLARIO.

I. Essendo ne' cerchi uguali, e molto più nel medesimo cerchio, gli angoli fatti ai centri proporzionali agli archi, su quali appoggiano, e i settori proporzionali agli archi, da' quali sono terminati; è chiaro, che ogni angolo al centro sta a quattro retti, come l'arco, sul quale appoggia all'intera periferia, ed ogni settore sta all'intero cerchio, come l'arco, dal quale è terminato all'intera periferia.

II. Da questo medesimo principio si ricava ancora, che se in due cerchi qualunque si formano, o ai centri, o alle periferie due angoli uguali; dovendo essere gli archi dove appoggiano d'ugual numero di gradi, saranno tali archi parti aliquote simili dell'intere periferie, e perciò proporzionali alle medesime; e conseguentemente i settori da tali archi terminati proporzionali saranno agl'interi cerchi; e per lo contrario, se i settori proporzionali ai cerchi, e gli archi all'intere periferie; essendo tali archi parti aliquote simili delle respettive periferie, e perciò d'ugual numero di gradi; saranno, sì gli angoli ai centri, che alle periferie tra loro uguali.

---

(1) *Prop. 22. lib. 3.*
(2) *Prop. 12. lib. 5.*

I cerchi sono tra loro in duplicata ragione de' diametri, e le circonferenze nella semplice ragione de' medesimi diametri.

Dim. I. Si concepiscano ne' cerchi ABCDEF, (*Fig. 161.*) GHIKLM iscritti due poligoni simili, e s'uniscano le rette AC, BD, GI, HK. Essendo simili i poligoni, sarà l'angolo ABC uguale all' angolo GHI, e AB a BC, come GH a HI. Sicchè i triangoli ABC GHI sono equiangoli (1), e perciò saranno uguali gli angoli BCA, HIG, e conseguentemente uguali saranno ancora gli angoli BDA, HKG, che appoggiano ai medesimi archi AB, GH; ma ne' triangoli ABD, GHK, sono anche uguali gli angoli ne' semicerchi ABD, GHK, come retti; onde uguali saranno ancora i rimanenti BAD, HGK. Dunque essendo equiangoli i triangoli ABD, GHK; sarà, come AB a GH, così AD a GK (2); ma i poligoni simili ABCDEF, GHIKLM sono in duplicata ragione di AB a GH (3). Sicchè saranno ancora in duplicata ragione di AD a GK. E poichè raddoppiando all' infinito il numero de' lati di tali poligoni colle continue iscrizioni, s'anderanno a confondere coi cerchi; perciò saranno i cerchi nella medesima ragione de' poligoni, e conseguentemente in duplicata ragione de' diametri AD, GK, ovvero de' raggi AN, GO.

II. Per la somiglianza de' poligoni iscritti, AB sta a GK, come BC a IH, e BC a HI, come CD a IK ec. Onde dovendo essere la somma degli antecedenti alla somma de' conseguenti, come un solo an-

(1) *Pro. 19. lib. 6.*
(2) *Pro. 17. lib. 6.*
(3) *Prop. 26. lib. 6.*

tecedente ad un solo conseguente (1); sarà il perimetro del poligono ABCDEF al perimetro del poligono GHIKLM, come AB a GH, e per conseguenza come AD a GK, ma confondendosi i poligoni coi cerchi, si confondono eziandio i perimetri di quelli colle circonferenze di questi. Per la qual cosa la circonferenza ACE è alla circonferenza GIL, anche come AD a GK, ovvero AN a GO. Ch'è quanto b. d.

PROP. XXXVI. TEOR. XXVI.

Il cerchio è uguale a un triangolo, che ha per base la sua periferia, e per altezza il raggio; e'l settore è uguale a un triangolo, che ha per base l'arco, dal quale è terminato, e per altezza il raggio.

Dim. I. Si concepisca circoscritto al cerchio il poligono regolare CEFGH (*Fig.* 162.), e tirato dal centro O al punto del contatto B il raggio OB, che sarà perpendicolare al lato CE (2), s'uniscano le rette OC, OE, OF, OG, OH, le quali divideranno il poligono ne' triangoli HOC, COE, EOF, FOG, GOH, che hanno per altezza comune il raggio OB. Sicchè è chiaro, che un triangolo, il quale ha per la somma de' lati CE, EF, FG, GH, HG, e per altezza il raggio OB, è uguale alla somma di tutt'i sopraddetti triangoli, cioè all'intero poligono; ma i poligoni circoscritti al cerchio colle continue iscrizioni si confondono col cerchio medesimo, e i loro perimetri colla periferia. Dunque eziandio il cerchio è uguale ad un triangolo, che ha per base la periferia, e per altezza il raggio.

---

(1) *Prop.* 18. *lib.* 5.
(2) *Prop.* 13. *lib.* 3.

II. Confondendosi colle continue circoscrizioni all' infinito, il poligono col cerchio, e 'l perimetro del poligono colla periferia; si confonderà ancora il triangolo COE col settore IOL, e la tangente CE coll'arco IL. Dunque è chiaro, essere il settore IOL uguale al triangolo, che ha per base una retta uguale all'arco IL, e per altezza il raggio OB. Ch' è quanto b. d.

COROLLARIO.

Dunque per avere l' ampiezza del cerchio bisognerà moltiplicare la periferia per la metà del raggio, o la metà della periferia pel raggio intero (1); che se poi tra i due termini da moltiplicarsi si troverà una mezza proporzionale, per essere il suo quadrato uguale al prodotto degli estremi, sarà conseguentemente uguale al cerchio; ch' è il famoso problema noto comunemente sotto il nome di *quadratura del cerchio*, il quale ha tenuto, e tiene tutt' ora agitate le menti di tanti Geometri.

AVVERTIMENTO.

Per determinare la perfetta quadratura del cerchio, è necessario determinare l' esatta ragione, che passa tra la periferia e 'l diametro, la quale è ancora ignota; si può però determinare per approssimazione con iscrivere, e circoscrivere al cerchio due figure regolari d' ugual numero di lati: imperocchè siccome la circonferenza è maggiore del perimetro della prima, e minore del perimetro della seconda, che sono i limiti, tra quali ritrovasi la ricercata ragione, così con aumentarsi il numero de' lati delle due figure, s' avvicineranno sempre più i medesimi limiti, e s'avrà

(1) *Avver. 3. def. 2. lib. 2.*

con questo mezzo una ragione molto prossima alla vera. Il primo a determinare la ragione della periferia al diametro fu l' infine Archimede, il quale coll'avere iscritti, e circoscritti al cerchio due poligoni ordinati di 96 lati, ritrovò, che il diametro stava alla periferia come 7 a 22 in circa; imperocchè, posto il diametro del cerchio uguale ad 1, il perimetro del poligono iscritto era $3\ {}^{10}/_{71}$, e del circoscritto $3\ {}^{1}/_{7}$. Molti tra i moderni Geometri seguendo le di lui pedate, ritrovarono ragioni molto più approssimanti; come in fatti è quella di Mezio, il quale ritrovò, che il diametro alla periferia stava come 113 a 355. Niuno però vi travagliò più di Ludolfo a Ceulen, il quale avendo stabilito il diametro uguale ad 1, ritrovò essere la perifera 3. 14159265358979323846264338327950 in circa: ma essendo una sì lunga serie di numeri incommoda per la pratica, sogliono i Geometri ne' piccoli cerchi servirsi della ragione di 1 a 3. 14. e ne' gradi di 1 a 3 1415, nella qual ragione con Ludolfo convengono anche Tolomeo, Vieta, e Ugenio.

Ritrovata la ragione della periferia al diametro è facile ora, dato il diametro di qualunque cerchio, determinare la periferia, o data la periferia, determinare il diametro, ed indi la sua ampiezza; facendo come sta 1 a 3. 14, così il dato diametro al quarto proporzionale, che sarà la ricercata periferia; ovvero come sta 3. 14 ad 1, così la data periferia al quarto proporzionale, che sarà il diametro desiderato; e moltiplicando finalmente la quarta parte del diametro per la periferia, s' avrà l' ampiezza del cerchio.

IL FINE.

AVVERTIMENTO.

Avendo molti Autori l' uso di citare le geometriche proposizioni secondo l' ordine di Euclide ; perciò , affinchè i Giovani non abbiano a confondersi vedendole quì disposte secondo le proprie materie , soggiugniamo la seguente tavola , nella quale si potrà in un' occhiata vedere il rapporto di quelle di Euclide con queste.

TAVOLA

Che indica il suddetto rapporto.

Lib. I. di Euclide	
Pr. 1	Pr. 4 lib. 1.
2	5
3	6
4	2
5	25
6	26
7	Lem. al. pr. 1.
8	1
9	9
10	10
11	11
12	12
13	13
14	14
15	15
16	Cor. 1. pr. 23.
17	Cor. 2. pr. 23.
18	27
19	28
20	Avv. def. 18.
21	24
22	7
23	8
24, 25	Cor. pro. 2.
26	3
27	17
28	18
29	19
30	20
31	22
32	23
33	21
34	29
35	31
36	32

Lib. I.	
37	31
38	32
39	33
40	34
41	Cor. pro. 32.
42	35
43	30
44	36
45	37
46	Pr. 1. lib. 2.
47	12
48	15

Lib. II. di Euclide	
Pr. 1	Pr. 2. lib. 2.
2	4
3	3
4	5
5	8
6	9
7	6
8	7
9	10
10	11
11	16
12	13
13	14
14	20

Lib. III. di Euclide	
Pr. 1	Pr. 5 lib. 3.
2	7
3	2
4	3
5	16
6	17
7	8

Lib. III.

8	9
9	4
10	18
11	19
12	20
13	21
14	10
15	11
16	12
17	15
18	13
19	14
20	22
21	23
22	34
23	30
24	31
25	6
26, 27	32
28, 29	33
30	34
31	25
32	26
33	28
34	29
35	35
36	36
37	37

Lib. IV.
di Euclide

Pr. 1	Pr. 1 lib. 4
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10

Lib. IV.

11	11
12	12
13	13
14	14
15	15
16	16

Lib. V.
di Euclide

Le prime sei proposizioni di questo autore, come anche la 20, e 21 non si veggono quì soggiunte, essendo superflue nel nostro metodo.

Pr. 7.	Pr. 1. lib. 5.
8	2
9	3
10	4
11	5
12	18
13	6
14	14
15	12
26	8
17	10
18	9
19	13
22, 23	16
24	19
25	15

Lib. VI.
di Euclide

Pr. 1	Pr. 1 lib. 6.
2	7
3	8
4	17
5	18
6	19
7	20
8	22
9	14
10	15

Lib. VI.	
11	12
12	11
13	13
14)	6
15)	
16	9
17	10
18	29
19	25
20	26
21	Cor. def. 2. l. 6.
22	28
23	4
24	23
25	30
26	24
27	31
28	32
29	33
30	16
31	27
32	21
33	34

INDICE

DE' CAPITOLI

Che si contengono in questo Secondo Tomo.

LIBRO PRIMO.

LIBRO SECONDO

LIBRO TERZO.

LIBRO QUARTO

LIBRO QUINTO.

LIBRO SESTO.

Fine dell' Indice.